PROJET NORME 11929

14 MARS 2014

NORME INTERNATIONALE **ISO**

11929

Première édition
2010-03-01

Sommaire **Page**

1 Domaine d'application **5**
2 Références normatives **5**
3 Termes et définitions **6**
4 Grandeurs et symboles **8**
5 Principes essentiels **10**
6 Modèle de la mesure et limites caractéristiques **17**
7 Documentation **24**
Annexe A Eléments de probabilité et inversion bayésienne **26**
ANNEXE B INCERTITUDE DANS LE FORMALISME BAYESIEN **33**
ANNEXE C LOI DE POISSON ET INVERSION BAYESIENNE **37**
Annexe D Principe du calcul du seuil de décision a partir d'une estimation unique du bruit de fond **40**
ANNEXE E (indicative) **APPLICATIONS A DES MESURES PAR COMPTAGE SPECTROMETRIQUES** **44**
Annexe F Calcul limite de detection **50**
Annexe G Cumul de mesures multiples **56**
ANNEXE H PORTIQUE DE DETECTION **62**
Annexe I Ictomètres ou radiamètres analogiques et numériques **65**
Annexe J CALCUL SD SUR UN SIGNAL « COURANT » **68**

Avant-propos

L'ISO (Organisation internationale de normalisation) est une fédération mondiale d'organismes nationaux de normalisation (comités membres de l'ISO). L'élaboration des Normes internationales est en général confiée aux comités techniques de l'ISO. Chaque comité membre intéressé par une étude a le droit de faire partie du comité technique créé à cet effet. Les organisations internationales, gouvernementales et non gouvernementales, en liaison avec l'ISO participent également aux travaux. L'ISO collabore étroitement avec la Commission électrotechnique internationale (CEI) en ce qui concerne la normalisation électrotechnique.

Les Normes internationales sont rédigées conformément aux règles données dans les Directives ISO/CEI, Partie 2.

La tâche principale des comités techniques est d'élaborer les Normes internationales. Les projets de Normes internationales adoptés par les comités techniques sont soumis aux comités membres pour vote. Leur publication comme Normes internationales requiert l'approbation de 75 % au moins des comités membres votants.

L'attention est appelée sur le fait que certains des éléments du présent document peuvent faire l'objet de droits de propriété intellectuelle ou de droits analogues. L'ISO ne saurait être tenue pour responsable de ne pas avoir identifié de tels droits de propriété et averti de leur existence.

L'ISO 11929 a été élaborée par le comité technique ISO/TC 85, *Énergie nucléaire*, sous-comité SC 2, *Radioprotection*.

Cette première édition de l'ISO 11929 annule et remplace l'ISO 11929-1:2000, l'ISO 11929-2:2000, l'ISO 11929-3:2000, l'ISO 11929-4:2001, l'ISO 11929-5:2005, l'ISO 11929-6:2005, l'ISO 11929-7:2005 et l'ISO 11929-8:2005, qui ont fait l'objet d'une révision technique, en particulier en ce qui concerne le type de traitement statistique des données.

Introduction

Les limites spécifiées dans la présente Norme internationale, censées être fournies au moyen de tests statistiques et de probabilités spécifiées, permettent d'évaluer les possibilités de détection d'un mesurande comme suit:

- Le «seuil de décision» permet de décider si la valeur de mesure est significative d'une présence ou non du mesurande.

- La «limite de détection» indique la plus petite valeur vraie du mesurande ayant une probabilité de non-détection suffisamment faible pour être acceptable. Cette limite peut être comparée à une valeur de référence, permettant de vérifier si la procédure satisfait ou non aux exigences et si elle est donc adaptée à l'objectif de mesurage prévu;

- Les «extrémités de l'intervalle de confiance» comprennent un intervalle de confiance comprenant la valeur vraie du mesurande avec une probabilité spécifiée. Dans certains cas, la limite basse peut -être égale à 0

Les limites mentionnées ci-dessus sont appelées conjointement «limites caractéristiques».
Comme l'incertitude de mesure joue un rôle important dans la présente Norme internationale, l'évaluation des mesurages et le traitement des incertitudes associées sont réalisés au moyen de procédures générales conformément au Guide ISO/CEI 98-3. La présente Norme internationale est basée sur :
- Les principes des tests statistiques d'hypothèse pour déterminer le seuil de décision et la limite de détection;
- Les méthodes statistiques Bayesiennes pour déterminer l'incertitude associée à la mesures mais aussi de tenir également compte des incertitudes sur les paramètres des modèles utilisés, tels que les rendements de comptage par exemple, incertitude impactant la valeur de la limite de détection.
- L'hypothèse que les valeurs de comptages non corrigées obéissent à la statistique de Poisson.

Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de détection et extrémités de l'intervalle de confiance)pour mesurages de rayonnements ionisants Principes fondamentaux et applications

1 Domaine d'application

La présente Norme internationale spécifie une procédure, dans le domaine de la métrologie des rayonnements ionisants, permettant de calculer le «seuil de décision», la «limite de détection» d'une procédure de mesure ainsi que les «extrémités de l'intervalle de confiance» associés à l'estimation de la valeur vraie d'un mesurande non négatif caractéristique d'une radioactivité générant des rayonnements ionisants, lorsque des mesurages par comptage avec présélection de temps ou du nombre d'impulsions sont réalisés, et que la valeur de mesure résulte d'un comptage brut et d'un comptage du bruit de fond ainsi que de grandeurs supplémentaires sur la base d'un modèle d'évaluation (efficacité etc..). En particulier, le mesurande, en général l'activité d'un radionucléide spécifié dans un échantillon, peut être estimée à partir de comptage net défini comme la différence du comptage brut échantillon et d'une estimation du comptage du bruit de fond, où leur taux respectifs. Cette estimation peut également être influencée par les incertitudes propagées par l'étalonnage du système de mesure, par le traitement de l'échantillon et par d'autres facteurs.

La présente Norme internationale s'applique essentiellement à des techniques de mesures nucléaires de type impulsionnelles tels que :

- Des comptages bruts (voir annexe D)
- Des comptages nets obtenu par correction du bruit de fond
- Des taux de comptages bruts (annexe I) ou nets
- Des mesurages par spectrométrie alpha, béta ou gamma
- Des portiques de détection (annexe H)

L'utilisation de l'hypothèse poisonnienne impliquant que l'opérateur ait accès d'une façon ou d'une autre aux nombres d'interactions dans le détecteur, cela exclue du champ d'application des techniques de mesures basés sur le mode courant, tels que chambre d'ionisation, radiamètres, dosimètres TLD etc..Pour ces derniers cas, des indications permettant d'obtenir un seuil de décision expérimental acceptable sont données en annexe J

2 Références normatives

Les documents de référence suivants sont indispensables pour l'application du présent document. Pour les références datées, seule l'édition citée s'applique. Pour les références non datées, la dernière édition du document de référence s'applique (y compris les éventuels amendements).
ISO 31-0, *Grandeurs et unités — Partie 0: Principes généraux*
ISO 31-9, *Grandeurs et unités — Partie 9: Physique atomique et nucléaire*
Guide ISO/CEI 98-3:2008, *Incertitude de mesure — Partie 3: Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM:1995)*
Guide ISO/CEI 99:2007, *Vocabulaire international de métrologie — Concepts fondamentaux et généraux et termes associés (VIM)*
ISO 3534-1, *Statistique — Vocabulaire et symboles — Partie 1: Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités*

3 Termes et définitions

Pour les besoins du présent document, les termes et définitions donnés dans l'ISO 31-0, l'ISO 31-9, le Guide ISO/CEI 98-3, le Guide ISO/CEI 99 et l'ISO 3534-1 ainsi que les suivants s'appliquent.

3.1 procédure de mesure
description détaillée d'un mesurage conformément à un ou plusieurs principes de mesure et à une méthode de mesure donnée, fondée sur un modèle de mesure et incluant tout calcul destiné à obtenir un résultat de mesure
[Guide ISO/CEI 99:2007, 2.6]

3.2 mesurande
grandeur que l'on veut mesurer
[Guide ISO/CEI 99:2007, 2.3]
NOTE Dans la présente Norme internationale,-un mesurande est non négatif et quantifie la source des rayonnements nucléaires, pour l'essentiel l'activité d'un radionucléide spécifié.

3.3 résultat d'un mesurage
ensemble de valeurs attribuées à un mesurande, complété par toute autre information pertinente disponible
[Guide ISO/CEI 99:2007, 2.9]

3.4 incertitude de mesure, incertitude
paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande, à partir des informations utilisées
[Guide ISO/CEI 99:2007, 2.26]
Voir également le Guide ISO/CEI 98-3.
NOTE L'incertitude d'un mesurage, dérivée selon le Guide ISO/CEI 98-3, comprend généralement plusieurs composantes. Certaines peuvent être évaluées grâce à la distribution statistique des résultats de séries de mesurages et peuvent être caractérisées par des écarts-types expérimentaux. Les autres composantes, qui peuvent également être caractérisées par des écarts-types, sont évaluées à partir de distributions de probabilité supposées ou connues et basées sur l'expérience ainsi que sur d'autres informations.

3.5 modèle d'évaluation
ensemble de relations mathématiques entre toutes les grandeurs mesurées et les autres grandeurs impliquées dans l'évaluation de la mesure
NOTE Le modèle d'évaluation n'est pas nécessairement une fonction explicite. Il peut être également un algorithme réalisé par un code de calcul informatique.

3.6 seuil de décision
valeur de mesure particulière telle que, quand une valeur de mesure d'un échantillon lui est supérieur, on décide que la mesure est selon toute vraisemblance significative de la présence d'un mesurande non nul.

3.7 limite de détection
plus petite valeur vraie du mesurande qui garantit une probabilité spécifiée qu'il soit détectable par la méthode de mesure

3.8 extrémités de l'intervalle de confiance
valeurs qui définissent un intervalle de confiance contenant la valeur vraie du mesurande avec une probabilité spécifiée
NOTE Un intervalle de confiance est parfois appelé intervalle crédible ou intervalle bayesien. Il est caractérisé dans la présente Norme internationale pour une probabilité spécifiée $1-\gamma$ □

3.9 meilleur estimateur de la valeur vraie du mesurande

valeur moyenne (espérance) de la loi de probabilité de la valeur vraie du mesurande, étant donné le résultat expérimental et toutes les informations obtenues préalablement à la réalisation du mesurage sur le mesurande.

3.10 valeur de référence
valeur qui correspond aux exigences scientifiques, juridiques ou autres qui est censée être évaluée par la procédure de mesure
NOTE 1 La valeur de référence peut être donnée, par exemple, comme une activité, une activité spécifique ou une concentration d'activité, une activité de surface ou un débit de dose.
NOTE 2 La comparaison de la limite de détection avec une valeur de référence permet de déterminer si la procédure de mesure satisfait ou non aux exigences énoncées par la valeur de référence et de garantir qu'elle est adaptée à l'objectif du mesurage prévu. La procédure de mesure satisfait à l'exigence si la limite de détection est inférieure à la valeur de référence.

3.11 bruit de fond
effet de mesurage provoqué par des rayonnements autres que ceux générés par le mesurande d’intéret
EXEMPLE Sources de radiation naturelles ou un radionucléide dans l’échantillon autre que le radionucléide recherché

3.12 comptage net
contribution due aux rayonnements générées par le mesurande d’intérêt (radionucléide spécifiée dans un échantillon)

3.13 comptage brut
Comptage obtenu par la sommation naturelle du bruit de fond et du comptage net

3.14 facteur d'écran
facteur décrivant la réduction du taux de comptage du bruit de fond par l'effet d'écran provoqué par l'objet du mesurage.
Note : Se rencontre essentiellement dans le cas des portiques de détection de sortie de zone

3.15 constante de temps de relaxation
durée pendant laquelle le signal de sortie d'un ictomètre à échelle linéaire diminue pour atteindre 1/e fois la valeur de départ après l'arrêt de la séquence des impulsions d'entrée

3.16 bruit de fond sous pic
mesurage spectrométrique nombre d'événements sans intérêt dans la région d'une raie considérée du spectre
NOTE Ces événements peuvent être dus au bruit de fond provoqué par les rayonnements environnementaux et à l'échantillon lui-même (par exemple à partir d'autres raies).

4 Grandeurs et symboles

Les symboles des grandeurs auxiliaires et les symboles utilisés uniquement dans les annexes ne sont pas répertoriés. Les grandeurs physiques sont désignées par des lettres majuscules mais doivent être soigneusement distinguées de leurs valeurs, désignées par les lettres minuscules correspondantes. pour les grandeurs et symboles spéciaux méthodes bayesiennes.

Y_m : variable aléatoire représentant la dispersion physique des valeurs de mesure (ex : loi de Poisson pour les comptages nucléaires bruts)

$\tilde{y}$: valeur vraie du mesurande, en général inconnu sauf par hypothèse. Si l'effet physique d'intérêt n'est pas présent, alors $\tilde{y} = 0$, sinon $\tilde{y} > 0$. En général le mesurande est l'activité ou l'activité spécifique d'un radionucléide spécifié.

$Y_m \mid \tilde{y}$: variable aléatoire représentant la dispersion physique des valeurs de mesure mais en précisant que la valeur vraie est connue, en général par hypothèse.

y : valeur de mesure , réalisation de la variable aléatoire Y_m. y peut être positif ou négatif dans le cas de mesures corrigées

σ : écart-type de la loi de distribution de la variable Y_m ou $Y_m \mid \tilde{y}$. Ce paramètre de dispersion est une quantité mesurable par répétition des mesures ou peut être estimé à partir d'une mesure unique sous hypothèse poissonnienne

y_j : valeurs de mesures *y* obtenues à partir de différents mesurages (*j* =0,1,2, ...)

$\tilde{Y}$ *:* variable aléatoire dont la loi de probabilité représente l'état de connaissance sur le mesurande (exemple : loi gamma pour les comptages nucléaires brut (voir annexe C)

$\tilde{Y} \mid y$ ou $\tilde{Y} \mid \{y_i\}$: idem précédent en précisant les valeurs de mesures permettant la construction de cette loi.) (voir annexe B)

$\hat{y}$ *:* estimation du mesurande, réalisation de la variable $\tilde{Y}$ En tant que valeur vraie possible, $\hat{y}$ ne peut être que positif ou nul. De toutes les estimations possibles, on choisit en général celle de plus grande probabilité, ou maximum de vraisemblance, ou encore la valeur moyenne de la variable $\tilde{Y}$. C'est ce meilleur estimateur qui est utilisé dans le cadre de cette norme

$u(\hat{y})$: écart-type de la loi de probabilité de $\tilde{Y}$ ou incertitude-type . Ce paramètre de dispersion des valeurs vraies possible n'est une grandeur mesurable, mais peut être obtenue dans une démarche bayesienne.

y_r : valeur de référence du mesurande

$y^{\triangleleft}, y^{\triangleright}$ *:* limite basse et haute, respectivement, de l'intervalle de confiance du mesurande

t_0 , t_s : temps de comptage resp.bruit de fond et échantillon

n : rapport t_0/t_s

G , B , Net :Variable aléatoire du comptage respectivement brut échantillon, bruit de fond et net. Dans le cadre de cette norme G et B obéissent à une loi de Poisson.. La variable Net physique générée par le radionucléide recherché est aussi une variable de Poisson, mais la variable Net obtenu par $Net = G - B/n$ dans le cadre d'une estimation n'est pas une variable de Poisson

g , b , net : valeur de comptage resp.brut échantillon, bruit de fond , net , réalisations des variables G , B et Net

σ_g , σ_b , σ_n : ecart-type vrai de dispersion des variables G , B et Net

r_g , r_b , r_n : taux de comptage .brut échantillon, bruit de fond , net

μ_g , μ_b , μ_n : valeur de la moyenne vraie des variables G , B , Net . Paramètre unique de la loi de Poisson lorsque cette hypothèse est vérifiée.

r_g , r_b , r_n : taux de comptage .brut échantillon, bruit de fond , net

τ_g, τ_0 : constante de temps de relaxation d'un ictomètre utilisé pour le mesurage du taux de comptage brut et du taux de comptage du bruit de fond, respectivement.

θ : paramètre générique de conversion permettant de passer par division d'un comptage net à une activité ou une activité spécifique, et utilisé dans le modèle de la mesure

$u_{rel.\theta}$: Incertitude relative sur le paramètre de conversion

α, β : respectivement probabilités de l'erreur de première et de deuxième espèce.

$1-\gamma$: probabilité relative à l'intervalle de confiance du mesurande

k p , *kq :* quantiles d'une distribution normale type pour les probabilités *p* et *q*, respectivement (par exemple : *p* = $1-\alpha$ ou $1-\beta$ ou $1-\gamma/2$)

$k_{1-\alpha}$ et $k_{1-\beta}$: quantiles de la distribution normales associés aux risques asymétriques respectivement de première et seconde espèce. Pour le risque β, ce quantile est utilisable pour des incertitudes relatives sur le rendement inférieures à 10 %

$k_{1-\gamma/2}$: quantiles de la distribution normales associé à l'intervalle de confiance symétrique du mesurande pour des mesures supérieures au seuil de décision

$k^*_{1-\beta}$: quantile de la distribution de l'hypothèse H_1 lorsque l'incertitude relative sur le rendement est supérieure à 10%. Ce quantile est base sur des lois bêta ((annexe F)

$\Phi(t)$ fonction de distribution de la distribution normale type; $\Phi(k_p) = p$ s'applique

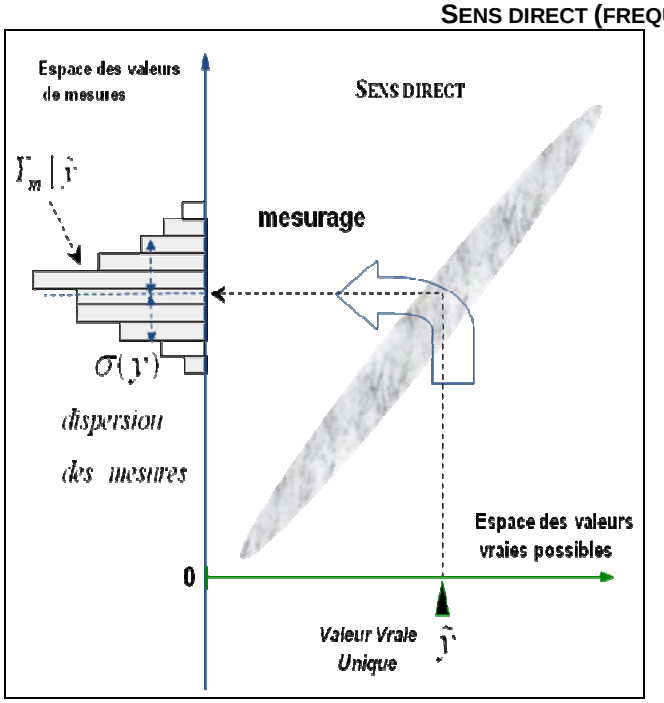
5 Principes essentiels

5.1 La mesure dans une perspective causes-effets

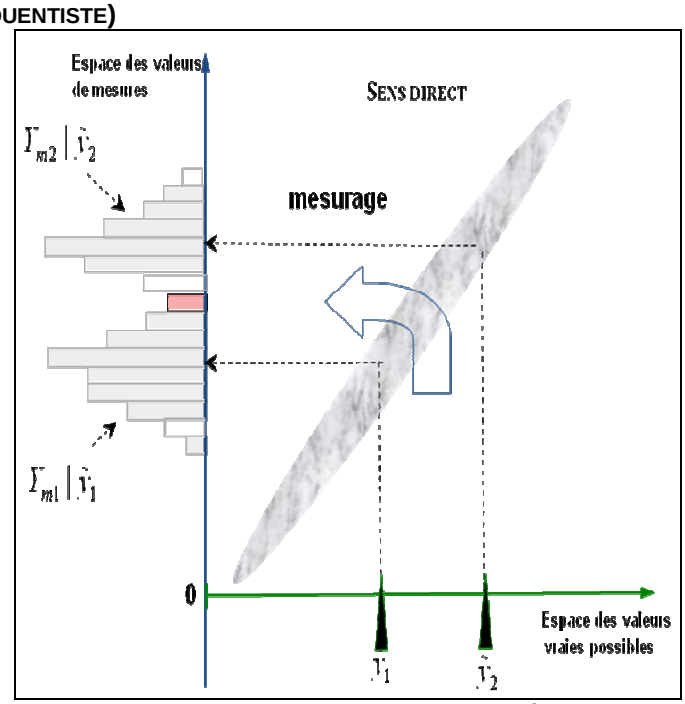
L'acte de mesure doit être décrit en termes de causalité : le mesurande peut être compris comme la cause qui, soumise à mesurage, produit un effet : la valeur de mesure. Ce schéma de pensée permet alors de distinguer deux sens. Le sens direct- *cause vers effet*- est celui dans lequel se construisent les tests statistiques. Le point de départ repose sur l'hypothèse de causes connues et déterminées. Le sens inverse -*effet vers cause*- est celui dans lequel, à partir de valeurs de mesures acquises, émerge le concept d'estimation du mesurande et de son incertitude associé. Les outils, respectivement statistiques et probabilistes apparaissent alors naturellement en constatant que :

- Dans le sens direct, une même cause peut avoir des effets différents par dispersion naturelle des mesures(graphe 1), mais pour la même raison deux causes différentes connues peuvent avoir un même effet (graphe 2)
- Dans le sens inverse : un même effet obtenu par mesure unique peut avoir des causes différentes inconnues(graphe3 et 4)

SENS DIRECT (FREQUENTISTE)



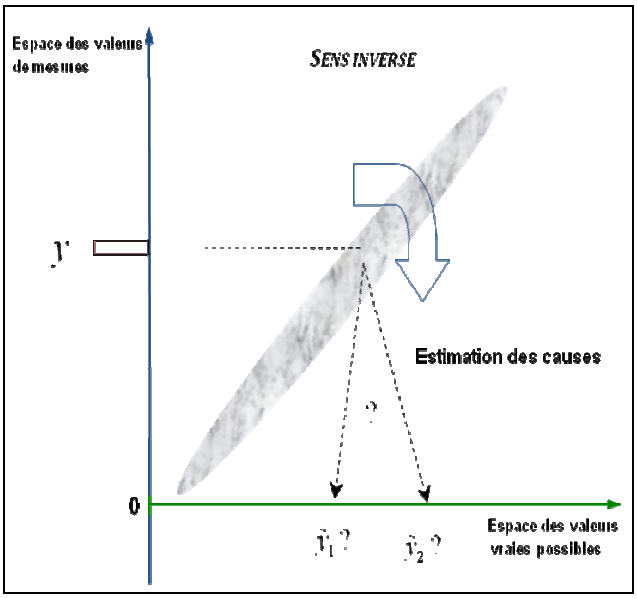
Graphe 1 :même cause , effets différents



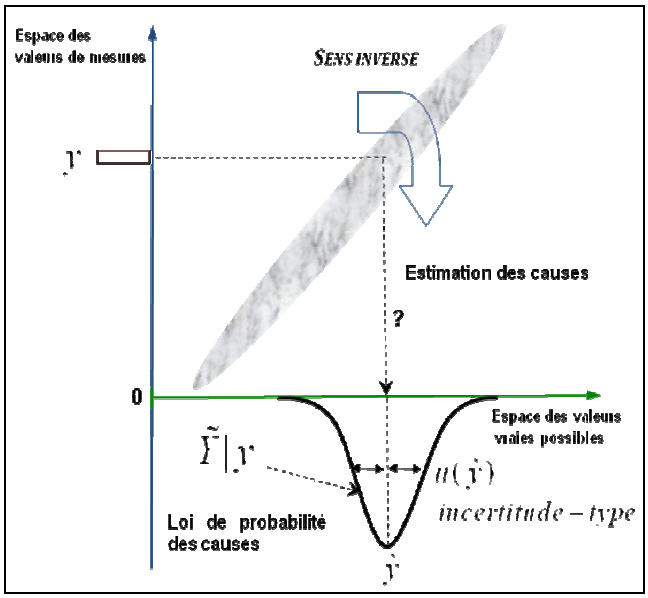
Graphe 2 : Causes différentes, même effet

*

SENS INVERSE (BAYESIEN) :



Graphe 3 Plusieurs causes possibles pour un même effet



Graphe 4 Incertitude sur le mesurande estimé

Ces constats introduisent alors :

- Dans le sens direct : des lois de probabilité fréquentistes des mesures notées $Y_m \mid \tilde{y}$
- Dans le sens inverse : des lois de probabilité bayesiennes du mesurande $\tilde{Y} \mid y$

(voir annexe C)

5.2 la problématique des mesures à bas niveaux

Les mesures à bas niveaux se caractérisent par des valeurs de comptages bruts g proches du comptage de bruit de fond b. Dans ce type de situations deux problèmes sont susceptibles d'apparaitre. Le premier est de savoir si la mesure avec échantillon est significative ou non d'une présence avérée du mesurande $(\tilde{y} > 0?)$. Le second apparait lorsque l'on calcule l'incertitude associée à l'estimation du mesurande. L'incertitude élargie (k=2) peut dans ce cas être supérieure à l'estimation du mesurande $(2u(\hat{y}) > y)$. La construction usuelle de l'intervalle de confiance de la valeur vraie sous la forme symétrique $\hat{y} \pm 2u(\hat{y})$ devient problématique car la limite basse de cet intervalle est négative $(y^{\triangleleft} = \hat{y} - 2u(\hat{y}) < 0)$. Un tel résultat n'est pas cohérent avec la contrainte d'un mesurande non négatif. Ce second problème est encore plus évident dans le cas d'un comptage net négatif $(g < b \Rightarrow y < 0)$. Les réponses à ces deux problèmes relèvent d'approches différentes mais complémentaires et cohérentes. La réponse au premier problème fait appel à la théorie des tests statistiques, fondée sur des considérations fréquentistes liés à la dispersion physique des mesures. C'est dans ce cadre que s'inscrit le concept de seuil de décision y^* et de limites de détection $y^{\#}$. La réponse au second problème nécessite de construire des estimateurs cohérents avec l'hypothèse d'un mesurande non négatif. Une telle construction nécessite l'emploi d'un formalisme bayesien rigoureux. Ces deux approches ne sont pas incompatibles. Au demeurant les seuils de décision et limites de détection nécessitent eux aussi la mise en œuvre de méthodes bayesiennes pour pouvoir prendre en compte les incertitudes de mesures dans leurs évaluations.

5.3 Principes généraux des tests statistiques d'hypothèses

5.3.1 le seuil de décision

L'objectifs d'un test statistique est de pouvoir rejeter ou non une hypothèse donnée. Cette hypothèse est ici une valeur vraie déterminée du mesurande $\tilde{y}$. On commence en choisissant une cause ou hypothèse préférentielle $H_0 : "\tilde{y} = \tilde{y}_0"$ que l'on souhaite tester. En général on peut toujours se ramener à $\tilde{y}_0 = 0$ en testant la différence entre une valeur de référence et une valeur de mesure. L'objectif est alors de savoir si une différence mesurée non nulle est significative ou non d'une différence vraie non nulle.

Exemple : on peut tester un coefficient de corrélation expérimental, en général toujours non nul, pour savoir s'il est significatif d'une vraie corrélation.

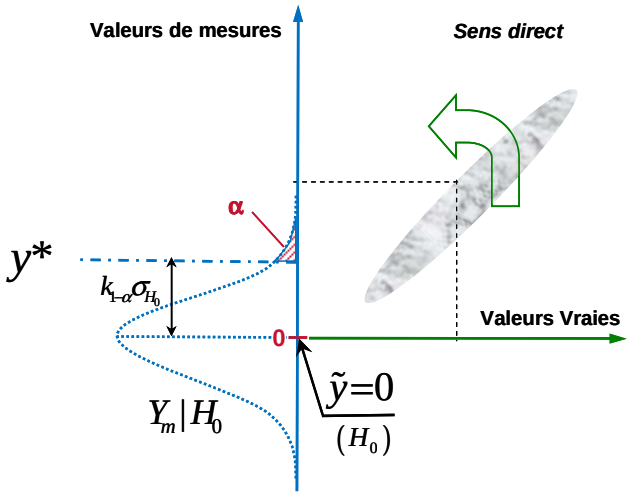
Dans le cas des mesures nucléaire, la valeur de référence est le signal de bruit de fond. La grandeur étudiée est alors la différence entre le signal obtenu en présence d'un échantillon susceptible de contenir ou des radionucléides spécifies, et un échantillon ne les contenant pas (estimation du bruit de fond). Dans ce cadre, l'hypothèse H_0 consiste à considérer le cas où l'échantillon étudié ne contient pas le ou les radionucléides spécifiés.

On construit, expérimentalement ou par une approche théorique, la distribution de la variable $Y_m \mid H_0$ des mesures y sous hypothèse H_0. Cette distribution est caractérisée par (cf graphe 5):

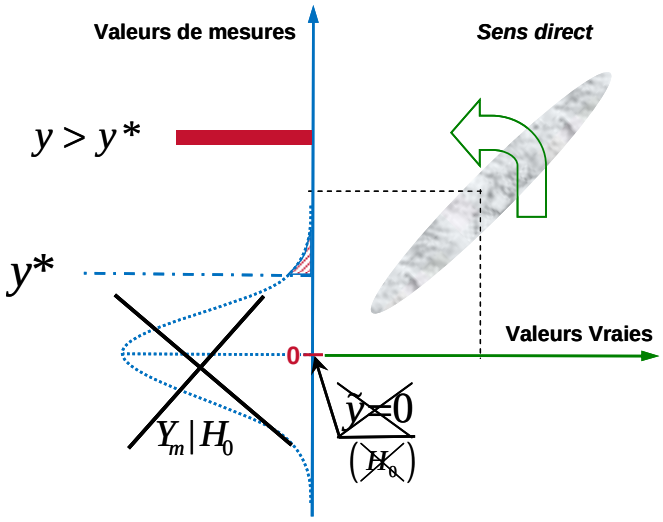
- Une moyenne vraie naturellement centrée sur zéro.
- Une variance $Var(Y_m \mid H_0)$, soit un écart-type de dispersion $\sigma_{H_0} = \sqrt{Var(Y_m \mid H_0)}$. Cette construction permet de déterminer la probabilité α pour qu'une valeur de mesure y soit supérieure à une valeur de mesure donnée y^* dans l'hypothèse H_0 (cf graphe 5) :

$$P\left(y > y^* \mid H_0\right) = \alpha \quad \textbf{(1)}$$

Pour une valeur suffisamment faible de α, en général 2,5 % ou 5 %, la valeur particulière y^* peut jouer le rôle de valeur critique de rejet de l'hypothèse H_0. Cette valeur critique, appelée dans le cadre de cette norme « seuil de décision », peut être utilisée suivant deux optiques différentes :



Graphe 5 construction distribution H_0



Graphe 6 rejet de H_0 ***lorsque*** $y > y^*$

Utilisation *a posteriori :* Confirmation de présence du mesurande:
Lorsque l'on obtient une valeur de mesure $y > y^*$ pour un mesurande $\tilde{y}$ inconnue soumis à mesurage, on peut selon toute vraisemblance* rejeter pour ce mesurande l'hypothèse H_0 et considérer ainsi que $\tilde{y} > 0$ (cf graphe 6). On déclare que l'effet de la présence d'un mesurande non nul est détectée.

** lorsque $y > y^*$, la probabilité que le mesurande soit absent (H_0) est inférieure au risque α, et ce d'autant plus que la valeur de mesure est grande devant le seuil de décision.*

Utilisation *a priori*: Maitrise du taux de faux positifs :
Dans le cadre de la règle précédente, le cas où $y > y^*$ alors que $\tilde{y} = \tilde{y}_0 = 0$,sans que cela soit connue, amène à tord au rejet de H_0 : l'effet est déclaré détecté alors que la cause est absente. Cet évènement est appelé un faux positif. L'intérêt de la détermination du seuil de décision y^* est de pouvoir déterminer *a priori* le taux de faux positif ou risque de première espèce ou encore risque α. La détermination du seuil de décision pour un risque α donnée ne nécessite qu'une estimation du bruit de fond représentatif du bruit de fond en présence de l'échantillon.

Avec $\tilde{y}_0 = 0$ Le seuil de décision se calcule suivant la relation générale :

$$y^* = k_{1-\alpha}\sigma_{H_0} = k_{1-\alpha}\sqrt{Var(Y_m \mid H_0)} \quad \textbf{(2)}$$

Cette relation montre que le paramètre essentiel qu'il convient d'estimer au mieux est l'écart-type σ_{H_0} de dispersion des mesures sous hypothèse H_0. L'intérêt de l'hypothèse poissonnienne des comptages bruts réside dans la relation fondamentale $\sigma = \sqrt{\mu}$ qui permet à termes d'estimer correctement σ_{H_0} à partir d'une estimation unique de bruit de fond (voir annexe C)

5.3.2 La limite de détection
Lorsque, à l'issue du mesurage d'un mesurande inconnu, on obtient $y < y^*$, on ne peut plus rejeter H_0 sans pour autant que cette hypothèse soit la seule possible. L'effet est non détecté mais la cause peut être présente ou absente. Pour contourner cette situation d'indécision, on introduit le concept d'hypothèse alternative $H_1 : "\tilde{y} = y^{\#} > 0"$. A termes, sous certaines conditions, la valeur $y^{\#}$ de l'hypothèse H_1 est appelée limite de détection. Quelle que soit, dans un premier temps, la valeur non nulle de $y^{\#}$, la dispersion σ_{H_1} des mesures dans l'hypothèse H_1, permet de déterminer, pour y^* donné (cf § 5.2.1), la probabilité fréquentiste β d'avoir, une valeur de mesure $y < y^*$:

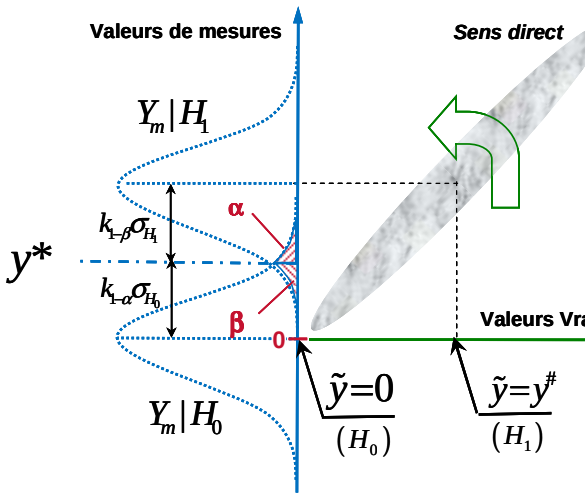
$$P\left(y < y^* \mid H_1\right) = \beta \quad \textbf{(3)}$$

Un tel évènement est appelé faux-négatif : l'effet n'est pas détecté alors que la cause, $y^{\#}$, est présente. On détermine la valeur $y^{\#}$ de façon à avoir un risque β suffisamment faible. L'usage est de prendre un risque β égal au risque α. La limite de détection se calcule, pour des mesures corrigées du bruit de fond, à partir de la relation (cf graphe 7):

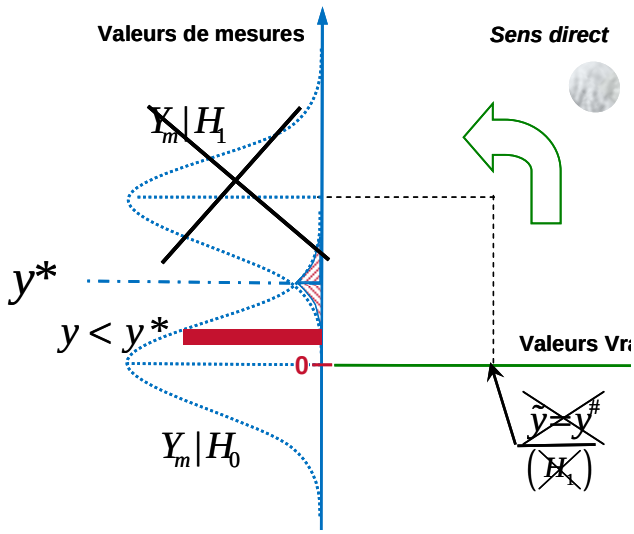
$$y^{\#} = k_{1-\alpha}\sigma_{H_0} + k_{1-\beta}\sigma_{H_1} \quad \textbf{(4)}$$

Dans ces conditions, lorsque l'on obtient une valeur de mesure $y < y^*$ pour un mesurande $\tilde{y}$ inconnue, on peut rejeter l'hypothèse H_1 et déclarer que selon toute vraisemblance* $\tilde{y} < y^{\#}$ (cf graphe 8). En conjuguant cette déclaration avec le non-rejet de H_0, une valeur de mesure inférieure au seuil de décision permet de conclure $0 \leq \tilde{y} < y^{\#}$. Le risque β de faux-négatif est encore appelé risque de seconde espèce ou risque client.

**: lorsque $y < y^*$,la probabilité que H_1 soit vraie est inférieure au risque β, et ce d'autant plus que la valeur de mesure est petite devant le seuil de décision.*



Graphe 7 : Construction de l'hypothèse H_1



Graphe 8 : rejet de l'hypothèse H_1 ***lorsque*** $y < y^*$

Comme pour le seuil de décision, la limite de détection s'emploi sous deux optiques différentes :

Approche *a priori* , maitrise du taux de faux négatifs :
La limite de détection permet de connaître et de fixer le taux de faux négatifs attendu d'un processus de mesure. Cette valeur représente aussi la limite basse du mesurande pour laquelle on a une quasi-certitude, au risque β près, de détection systématique

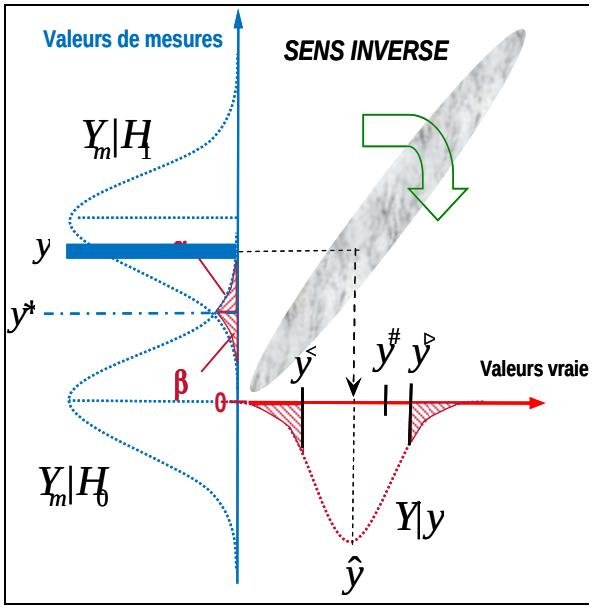
Note : Une confusion courante est de considérer la limite de détection comme la limite minimale de détection, au sens où l'on ne pourrait pas détecter et déclarer de valeur plus basse. Cette perception erronée est à l'origine de nombreuses difficultés dans l'utilisation des ces outils statistiques. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu' a priori pour une valeur vraie inférieure à $y^{\#}$, le risque de non-détection est plus élevé. A l'inverse les chances d'une détection avérée (vrai positif) sont certes plus faibles, mais pas nulles.

Approche *a posteriori*, valeur maximale haute :
Lorsque la valeur de mesure est inférieure au seuil de décision, la limite de détection permet de donner une valeur haute maximale à la valeur vraie du mesurande dans l'hypothèse d'une présence de radioactivité (cf graphe 8). Cette approche permet ainsi de construire un intervalle de confiance $\left[0; y^{\#}\right]$ lorsque $y < y^*$:

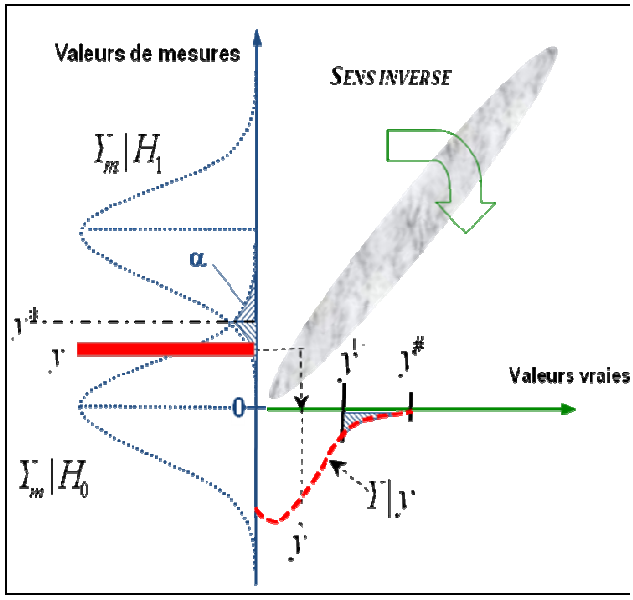
$$y < y^* \Rightarrow \tilde{y} \in \left[0; y^{\#}\right] \Leftrightarrow 0 \leq \tilde{y} < y^{\#} \qquad \textbf{(5)}$$

5.3 Compatibilité avec l'incertitude de mesure

L'état de connaissance du mesurande estimé à partir de valeur de mesure se traduit par une loi de probabilité dont l'écart-type est égal à l'incertitude –type $u(\tilde{y})$. Dans la majorité des cas cette loi est une loi normale centrée sur la mesure ou la moyenne des mesures. Pour des mesures significativement supérieures au seuil de décision, $u(\tilde{y})$ se calcule conformément au GUM et permet de construire des intervalles de confiance symétriques $\left[y^{\triangleleft} ; y^{\triangleright} \right]$ cohérents (cf graphe 9 et § 6.4.1).



Graphe 9 : incertitude lorsque $y > y^*$



Graphe 10 : incertitude lorsque $y < y^*$

Pour des mesures inférieures au seuil de décision, la contrainte du mesurande non négatif ne permet plus cette construction. L'application rigoureuse du théorème de Bayes permet de lever cette difficulté et d'obtenir des lois de probabilités cohérentes mais non symétriques, analogues à des gaussiennes tronquées à l'origine (cf graphe 10). L'intervalle de confiance *a posteriori* $\left[y^{\triangleleft} ; y^{\triangleright} \right]$ obtenu lorsque $y < y^*$ se caractérise par : $y^{\triangleleft} = 0$ et $y^{\triangleright} < y^{\#}$ (cf §5.3.2).

Ce constat démontre que l'approche incertitude est cohérente avec l'approche des tests statistiques d'hypothèse. En effet la relation $0 \le \tilde{y} < y^{\#}$ obtenu précédemment est analogue à un intervalle de confiance *a priori* $\left[0 ; y^{\#} \right]$ qui contient l'intervalle *a posteriori* $\left[0 ; y^{\triangleright} \right]$.

Cette approche est conforme à l'approche préconisé dans le guide JCGM 106-2012

Remarque : l'application rigoureuse du théorème de Bayes pour des mesures supérieures au seuil de décision permet de retrouver les résultats conforme à l'approche classique du GUM (cf §6.4.3).

6 Modèle de la mesure et limites caractéristiques

6.1 Modèle de la mesure

Le modèle principal utilisé en mesure nucléaire est le suivant :

$$y = \frac{net}{\theta} = \frac{g - \hat{b}}{\theta} \qquad \textbf{(6)}$$

Rappel des notations utilisées:

- g : la valeur de comptage (cp) brut échantillon pendant le temps t_s. g est une réalisation d'une variable de Poisson
- b : la valeur de comptage (cp) du bruit de fond pendant t_0. b est une réalisation d'une variable de Poisson
- $n = t_0 / t_s$
- $\hat{b} = b/n$: estimation du comptage de bruit de fond ramené au temps de comptage échantillon. Si $n \neq 1$, $\hat{b}$ ne suit pas une loi de Poisson
- θ : paramètre de conversion de la mesure avec :
  - Comptage : $\theta = 1$
  - Taux de comptage : $\theta = t_s$
  - Activité par comptage total : $\theta = \varepsilon t_s$ avec ε le rendement de comptage
  - Activité par spectrométrie : $\theta = I \varepsilon_p t_s$ en avec I l'intensité d'émission et ε_p le rendement d'absorption totale à l'énergie considéré.
  - Activité spécifique volumique ou massique $\theta = m I \varepsilon_p t_s$ *ou* $\theta = V I \varepsilon_p t_s$

Remarque : le paramètre de conversion θ est parfois utilisé de façon équivalente sous la forme du facteur de conversion W avec $W = 1/\theta$

Particularité en spectrométrie gamma avec estimation du bruit de fond sur le spectre échantillon :

- $t_0 = t_s$
- g : la surface brute de la région d'intérêt (ROI)
- $\hat{b}$: la surface de bruit de fond sous pic estimé par la méthode du trapèze ou par la méthode de Galton
- $n = 2\ell / a$: le rapport du de la somme du nombre de canaux utilisé à gauche (ℓ_1) et à droite (ℓ_2) de la ROI et du nombre de canaux a dans la ROI .

6.2 seuil de décision

Le seuil de décision associée à ce modèle dans l'hypothèse du caractère poissonien de la variable B à partir d'une seule estimation $\hat{b}$ du bruit de fond est égal à :

$$y^* = k_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{H_0} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\hat{b}+\frac{1}{n}\right)}\Big/\theta \quad \textbf{(7)}$$

Remarque 1 : Dans le cas de la spectrométrie gamma, cette formule est applicable dans le cas $\ell_1 = \ell_2$

Remarque 2 : il est préférable lorsque cela est possible de respecter $n \geq 1$ *. Le cas* $n < 1$ *est susceptible de dégrader fortement le seuil de décision*

Cas particuliers en spectrométrie gamma: cas $\ell_1 \neq \ell_2$ ou utilisation d'un spectre de bruit de fond (ambiance) pour la prise en compte de la présence d'un pic dans le rayonnement ambiant : voir annexe E

Pour le cas des portiques de détection avec l'apparition du facteur d'écran du bruit de fond et de sa variabilité potentielle en fonction des caractéristiques macroscopiques de la source mesurée (véhicule, individu…) voir annexe H

Le quantile $k_{1-\alpha}$ est le quantile de la loi normale centrée réduite (loi normale standard). On peut effectivement montrer que la distribution de H_0 es tune gaussienne dans la plupart des cas.

6.3 limites de détection

Dans la mesure où la détermination de la limite de détection s'appuie sur l'hypothèse alternative d'un mesurande non nul, l'incertitude relative $u_{rel.\theta\varepsilon}$ sur le le facteur de conversion $\theta\varepsilon$ rendement impacte la valeur de la limite de détection, mais pas le seuil de décision.

En dehors de contrainte particulière, on prendra des risques égaux $\alpha = \beta$. Sous cette condition, la limite de détection est égale à respectivement

$$y^{\#} = C_{or}(u_{rel.\theta\varepsilon})\left[\frac{k_{1-\beta}^2}{\theta} + 2y^*\right] \qquad \textbf{(8)}$$

Avec $C_{or}(u_{rel.\theta\varepsilon})$ un terme de correction tenant compte de l'incertitude sur le rendement. Dans les cas les plus courant où $u_{rel.\varepsilon} < 10\%$ on a $C_{or}(u_{rel.\theta\varepsilon}) \approx 1$, ce terme de correction est inutile (cf annexe F)

Son expression générale est : $C_{or}(u_{rel.\theta\varepsilon}) = \dfrac{1}{1 - k_{1-\beta}^{*2}\, u_{rel.\theta\varepsilon}^2}$ **(9)**

Il augmente lorsque l'incertitude relative augmente pour un risque β constant

Le fractile $k_{1-\beta}^{*2}$ est fonction du risque β choisi ainsi que de l'incertitude relative $u_{rel.\varepsilon}^2$ (voir annexe F)

6.4 Valeur moyenne de l'estimation,incertitude de mesure et intervalle de confiance

6.4.1 Les estimateurs classiques (GUM)

A partir du modèle de la mesure (6), les estimateurs classiques associés à l'estimation de la valeur vraie du mesurande sont (cf graphe 11):

- Estimateur ponctuel : $\hat{y}_{Class.} = y = \frac{net}{\theta} = \frac{g - \hat{b}}{\theta}$ **(10)**
- Incertitude type : $u_{class.}(\hat{y}) = u(y) = \sqrt{\left[net + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \hat{b} \right] \Big/ \theta^2 + y^2 u_{rel.\theta}^2}$ **(11)**
- Limite basse de l'intervalle de confiance $y_{class.}^{\triangleleft} = y - k_{1-\gamma/2}\, u(y)$ **(12)**
- Limite haute de l'intervalle de confiance $y_{class.}^{\triangleright} = y + k_{1-\gamma/2}\, u(y)$ **(13)**

Remarque 1 : le GUM ne prend pas en compte la problématique du mesurande non-négatif. L'emploi de tels estimateurs s'appuie sur l'hypothèse implicite de valeurs de mesures significativement supérieures au seuil de décision

Remarque 2: Dans le cas où l'incertitude relative $u_{rel.\theta}$ de type B sur le paramètre est négligeable, cas le plus courant, l'incertitude –type classique devient :

$$u_{class.}(\hat{y}) = u(y) = \sqrt{net + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \hat{b}} \Big/ \theta$$

Dans le cas simple du comptage corrigé avec $t_0 = t_S$ on retrouve la relation usuelle :

$$u(net) = \sqrt{net + 2b} = \sqrt{g + b}$$

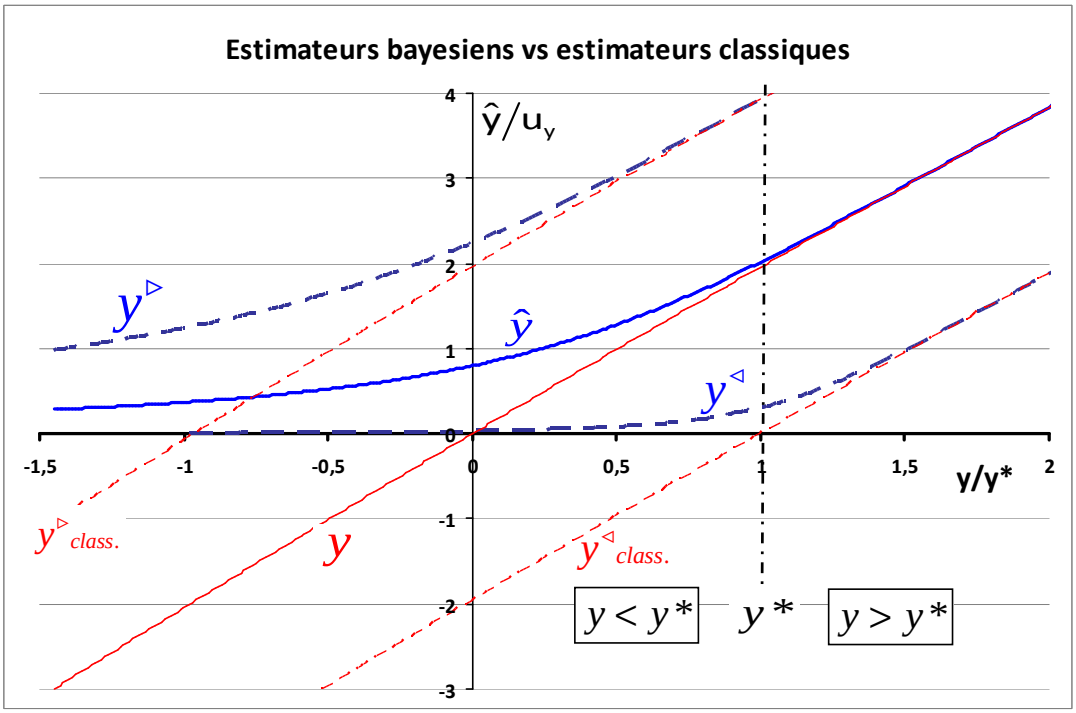
Remarque 3: Dans le cas particulier d'une mesure telle que $net = 0$, l'incertitude élargie s'écrit *:*

$$U(y = 0) = k \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} \right) \hat{b}} \Big/ \theta$$

Cette expression donne un résultat numérique très proche de la valeur du seuil de décision préconisée dans cette norme (cf rel 7).Pour autant cette analogie formelle qui permet de retrouver la valeur du seuil de décision ne peut pas être érigé en principe fondateur du seuil de décision

Remarque 4 : on prendra de préférence un niveau de confiance $1 - \gamma = 95\ \%$ *ce qui correspond au quantile usuel* $k_{1-\gamma/2} = k = 2$

Le problème de ces estimateurs classiques est qu'à bas niveau de mesures ils sont susceptibles de devenir négatifs, ce qui est incompatible avec le caractère non négatif du mesurande. C'est le cas par exemple avec la limite basse $y_{class.}^{\triangleleft} = y - k_{1-\gamma/2}\, u(y)$ pour des valeurs de mesures aussitôt que l'on passe en dessous du seuil de décision (cf graphe 11)



Graphe 11 : évolution comparée des estimateurs classiques (GUM) et bayesiens

6.4.2 Les estimateurs bayesiens

Les estimateurs bayesiens permettent de construire des estimateurs qui restent positifs, quelle que soit la valeur de mesure y , supérieure ou inférieure au seuil de décision, voire négative (cf graphe 11):

- Estimateur ponctuel moyen $\hat{y} = y + \dfrac{u(y)\exp\left\{-y^2 / \left[2u^2(y)\right]\right\}}{\omega\sqrt{2\pi}}$ **(14)**
- Incertitude-type associé : $u(\hat{y}) = \sqrt{u^2(y) - (\hat{y} - y)\hat{y}}$ **(15)**
- Limite basse de $y^{\triangleleft} = y - k_p\, u(y)$ avec $p = \omega \cdot (1 - \gamma/2)$ **(16)**
- Limite haute $y^{\triangleright} = y + k_q\, u(y)$ avec $q = 1 - \omega\gamma/2$ **(17)**

Avec : $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y/u(y)} \exp(-\dfrac{v^2}{2})dv = \Phi\left[y/u(y)\right]$ **(18)**

Remarque : La quantité ω représente aussi la probabilité bayesienne que le mesurande soit nul (hypothèse H_0) : $P(H_0 \mid y) = \omega$. Cette information est donné ici à titre purement indicatif. Elle montre par exemple que l'on a toujours :

- *$P(H_0 \mid y > y^*) < \alpha$, justifiant le rejet de l'hypothèse H_0 lorsque la mesure est supérieure au seuil de décision et par voie de conséquence la déclaration « effet détecté »*

Et à l'inverse

- $P\left(H_0 \mid y < y^*\right) > \alpha$ *justifiant le non-rejet de l'hypothèse* H_0 *lorsque la mesure est inférieure au seuil de décision, considérant par là que l'échantillon peut ne pas contenir le radionucléide recherché*

6.4 3 Cas des mesures supérieures au seuil de décision

Lorsque $y > y^*$, les estimations bayesiennes 14, 15, 16 et 17 sont équivalentes aux estimations classiques 10, 11,12 et 13 respectivement (cf graphe 11)

Continuité des résultats : pour le cas limite $y = y^*$ la différence relative est par exemple de l'ordre de 3 % $u(y)$ (rel. 11) et $u(\hat{y})$ (rel. 15)

Remarque 1 : Probabilité d'être non-radioactif : $P\left(H_0 \mid y > y^*\right) < \alpha$ *(E)*

Remarque 2 : pour une mesure y *de l'ordre de* $y^{\#}$*, on trouve* $P\left(H_0 \mid y \approx y^{\#}\right) \approx 0{,}01\%$*. La confirmation de la présence de radioactivité est à ce niveau une quasi-certitude*

Remarque 3 :: la condition $y > y^*$ *entraine* $y^{\triangleleft} > 0$ *pour* $k = 2$ *.l'intervalle de confiance reste ainsi cohérent avec le critère du mesurande non négatif cf graphe 11).*

6.4 4 Cas des mesures inférieures au seuil de décision

Lorsque $y < y^*$, il est indispensable d'utiliser les expressions bayesiennes 14, 15 et 16 pour calculer respectivement $\hat{y}$, $u(\hat{y})$ et $y^{\triangleright}$

Par contre, la limite basse $y^{\triangleleft}$ peut être simplement prise égale à 0, incluant ainsi la possibilité d'être non radioactif dans l'intervalle de confiance, en cohérence avec le non-rejet de H_0. De plus on constate numériquement que dans ce cas là la valeur $y^{\triangleleft} = y - k_p\, u(y)$ est très proche de zéro, cette valeur non nulle n'étant alors plus pertinente (voir graphe 11).

$$y < y^* \Rightarrow y^{\triangleleft} = 0$$

Dans le cas $y < y^*$, la loi de probabilité de la valeur vraie est une gaussienne tronquée à l'origine. Une telle loi ne permet plus de construire des intervalles de confiances symétriques permettant d'écrire les expressions usuelles au sens du GUM du type $y \pm 2u(y)$, représentant l'intervalle de confiance usuel . Il est alors important de se rappeler que dans ce cas là l'intervalle de confiance n'est autre que $\left[0; y^{\triangleright}\right]$, ce qui permet d'écrire de façon équivalente que $\tilde{y} < y^{\triangleright}$. On comprend ainsi que dans le cas $y < y^*$, c'est la valeur haute $y^{\triangleright}$ qui est l'information le plus pertinente, au sens de limite haute *a posteriori*.

6.5 Cohérence tests statistique et approche incertitude. Respect des tolérances

Rappel :

- Lorsque $y > y^*$ alors $y^{\triangleright} > y^{\#}$ (cf § 6.4.3)
- Lorsque $y < y^*$ alors $y^{\triangleright} < y^{\#}$ (cf § 6.4.4)

Pour s'assurer du respect d'une valeur de tolérance ou valeur guide y_r il faut s'assurer que le processus de mesure permet d'obtenir une limite de détection telle que $y^{\#} < y_r$. En respectant à minima $y^{\#} = y_r$, le respect de la tolérance $\tilde{y} < y_r$ (contamination aliments etc..) sera alors respectée lorsque $y < y^*$. En effet dans ce cas là on pourra écrire, en tenant compte des incertitudes de mesures, que la limite haute de l'intervalle de confiance du mesurande est inférieure à y_r :

$$\begin{cases} y < y^* \Rightarrow \quad y^{\triangleright} < y^{\#} \\ y^{\#} = y_r \\ \tilde{y} < y^{\triangleright} \end{cases} \Rightarrow \tilde{y} < y_r$$

A l'inverse, dans le cas $y > y^*$, la relation $y^{\triangleright} > y^{\#} = y_r$ montre que la valeur vraie $\tilde{y}$ du mesurande est potentiellement supérieure à la valeur de tolérance, y compris lorsque la valeur de mesure est inférieure à cette valeur de tolérance. Dans ce cas là on ne peut assurer le respect de la tolérance, même pour des mesures inférieures à cette valeur.

7 Documentation

Le contenu du rapport d'essai dépend de l'application spécifique ainsi que des demandes du client ou du régulateur. Cependant, les informations doivent être conservées afin de justifier les données du rapport d'essai et de garantir la traçabilité des informations, qui doivent comprendre au minimum:

a) une référence à la présente Norme internationale, à savoir ISO 11929:XXX;

Les paramètres d'entrées

b) le mesurande d'intérêt et le modèle de mesure;

c) Les paramètres du modèle de mesure t_s, t_0 ; n, ε et θ

d) les probabilités, α et β, des erreurs de première et de seconde espèce respectivement

e) La valeur de n et le risque de première espèce α conditionnant la détermination du seuil de décision

f) Les valeurs du risque de seconde espèce β *et l'incertitude relative sur le facteur de conversion* $u_{rel.\theta\varepsilon}$ conditionnant la détermination du seuil de décision

g) si nécessaire, la valeur de référence, y_r;

Les valeurs de comptages

h) La valeur de comptage de bruit de fond b

i) Les valeurs de comptage respectivement brut échantillon g et net échantillon net

Les valeurs de sortie du modèle de mesure non censurée

j) Le seuil de décision y^* lié à la mesure . Ce seuil de décision peut –être éventuellement être exprimé en termes de comptages net

k) la limite de détection $y^{\#}$;

l) La valeur de mesure y , même négative

Les résultats de mesures après utilisation des tests statistiques

m) Le résultat du test de comparaison au seuil de décision ; positif si $y > y^*$ et négatif si $y < y^*$

n) Pour un test positif, déclaration « effet détecté ».Données des résultat de mesures $\hat{y}$, $u(\hat{y})$, $y^{\triangleleft}$ et $y^{\triangleright}$ suivant les formules XXXXX. avec la probabilité, $1-\gamma$, pour l'intervalle de confiance.

o) Pour un test négatif, déclaration « effet non détecté ».Données des résultat de mesure à titre indicatif : $\hat{y}$ $u(\hat{y})$, $y^{\triangleleft}$ et $y^{\triangleright}$ suivant les formules XXXXX. Ce résultat peut être résumé au choix par $\tilde{y} < y^{\triangleright}$ ou $\tilde{y} < y^{\#}$

p) si nécessaire, l'affirmation selon laquelle la procédure de mesure est adaptée $\left(y^{\#} < y_r \,?\right)$, ou non $\left(y^{\#} > y_r \,?\right)$, à l'objectif prévu du mesurage .

Annexe A

Eléments de probabilité et inversion bayésienne

A.1 Eléments de la théorie des probabilités

On appelle espace probabilisée Ω un ensemble représentant la totalité des évènements pouvant se produire. On découpe cet espace en une partition d'évènements $\{B_i\}$, partition qui respecte les propriétés suivantes :

- Propriété 1: Les évènements sont disjoints : $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$

Remarque 1 : $B_i \cap B_j$ *se lit comme l'évènement conjoint « évènement B1 et évènement B2 »*

- Propriété 2 : La somme des évènements recouvre l'espace Ω : $\cup B_i = \Omega$

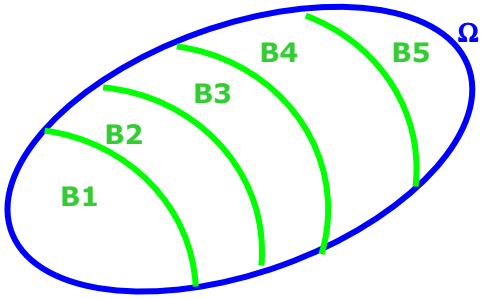
$B_i \cup B_j$ *se lit comme la somme des deux évènements au sens « évènement B1 ou évènement B2 »*

On munit cet espace d'une mesure P permettant de donner la probabilité $P(B_i)$ de chaque évènement, la probabilité étant un nombre compris entre 0 et 1. Les propriétés 1 et 2 permettent d'obtenir :

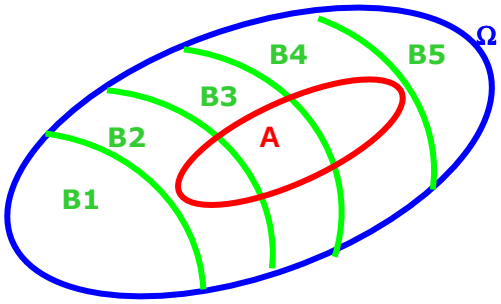
1 : $P(B_i \cap B_j) = 0$ si $i \neq j$

2 : $P(\cup B_i) = \sum_i P(B_i) = P(\Omega) = 1$

Représentation graphique



Les cinq évènements $B_1, B_2, ..., B_5$ représentent une partition de Ω. On peut considérer par exemple que la surface de Ω est égale à 1 et que la probabilité de chaque évènement B_i est représentée par sa surface respective. Considérons maintenant un évènement A quelconque de Ω :



On constate que A peut être découpé suivant la partition $\{B_i\}$ avec
: $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup .... \cup (A \cap B_5)$

On en déduit **le théorème des probabilités totales** : $P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$ **(1)**

A.2 Probabilités conjointes, probabilités conditionnelles et description causale

La probabilité conjointe $P(A \text{ et } B_i)$ des deux évènements **A** et B_i est la probabilité que les deux évènements se réalisent conjointement. On a la propriété suivante :

$$P(A \text{ et } B_i) = P(A \mid B_i) P(B_i) \quad \textbf{(2)}$$

$P(A \mid B_i)$ se lit comme la probabilité de l'évènement **A** sachant que l'évènement B s'est réalisé, ou probabilité de « A sachant B ». Une telle probabilité s'appelle une probabilité conditionnelle ; réalisation de A conditionnées par la réalisation de B. Elle est intéressante lorsque la réalisation ou non d'un évènement B est susceptible d'avoir un impact sur la réalisation ou non de l'évènement A.

Exemple : Evaluation du rendement de détection en spectrométrie gamma et choix du modèle de la mesure

Le rendement **ε** de détection est la probabilité d'avoir une interaction (impulsion) dans le détecteur sachant qu'un photon à été émis dans la source. Par exemple en spectrométrie gamma on peut décomposer cette probabilité suivant une chaîne causale pour le rendement d'absorption totale(rendement de pic) ε_{AT} à une énergie donnée (cas d'une source ponctuelle) :

$$\varepsilon_{AT} = P(\text{abs. totale} \mid \text{photon émis})$$

Que l'ont peut décomposer en évènement élémentaires :

$$\varepsilon_{AT} = P(\text{abs. totale} \mid \text{interaction}) \times P(\text{int.} \mid \text{photon incident sur dét.}) \times P(\text{photon incident sur det.} \mid \text{emission photon})$$

- $P(\text{abs. totale} \mid \text{interaction})$: probabilité que le photon ayant interagit dans le détecteur y dépose toute son énergie (effet photoélectrique ou effets multiples se terminant par un effet photoélectrique)
- $P(\text{absorption totale} \mid \text{interaction}) P(\text{interaction} \mid \text{photon incident sur dét.})$: rendement intrinsèque $\varepsilon_{int.AT}$ d'absorption totale.
- $P(\text{photon incident} \mid \text{emission photon})$: rendement géométrique $\Omega/4\pi$

Le rendement d'absorption totale est par définition : $\varepsilon_{AT} = \varepsilon_{int.AT} [\Omega/4\pi]$

La chaîne causale peut encore remonter plus en amont, en effet l'émission d'un photon est conditionnée par la désintégration d'un noyau :
$P(\text{emission photon}) = P(\text{emission photon} \mid \text{désintégration}) P(\text{désintégration})$

$P(\text{emission photon} \mid \text{désintégration})$ représente l'intensité d'émission I_γ. On obtient ainsi la probabilité d'une absorption totale pour une désintégration dans la source :

$$P(\text{abs. totale} \mid \text{désintégration}) = P(\text{abs. totale} \mid \text{photons émis})P(\text{photon émis} \mid \text{dés.}) = \varepsilon_{AT}\, I_{\gamma}$$

Sachant que le nombre moyen de désintégrations pour une durée de mesure t_s d'une source d'activité vraie $\tilde{A}$ est égal à $\tilde{A}\, t_s$, la loi des grands nombres permet d'obtenir la surface nette $\tilde{S}_{net}$ moyenne vraie du pic pour une mesure durant t_s :

$$\tilde{S}_{net} = \varepsilon_{AT}\, I_{\gamma} \tilde{A}\, t_s \text{ en supposant la période du radionucléide grande par rapport à } t_s$$

Cette approche, valable entre valeurs vraies, montre que la radioactivité est la cause première de la valeur de comptage net, l'effet, au travers du système de mesure. Cette même relation s'inverse et permet d'estimer l'activité de l'échantillon lorsque l'on connait une valeur expérimentale de la surface nette :

$$\hat{A} = \frac{S_{net}}{\varepsilon_{AT}\, I_{\gamma} t_s}$$

Indépendance entre deux évènements :
Deux évènements sont indépendants si la réalisation de l'un est sans influence sur la réalisation de l'autre. Ainsi si **A** et B_i sont indépendants, on a $P(A \mid B_i) = P(A)$.
On en déduit la relation fondamentale pour deux évènements conjoints indépendants **A** et B_i :

$$P(A \text{ et } B_i) = P(A)P(B_i) \text{ si } \mathbf{A} \text{ et } B_i \text{ sont indépendants}$$

Les probabilités conditionnelles présentent un intérêt particulier dans la description causale des évènements. Dans notre description, les évènements B_i peuvent être compris comme des causes possibles, ou facteurs influents de l'évènement A perçu comme un effet. L'expression $P(A \mid B_i)$ est alors la probabilité que la cause B_i produise l'effet A. Si $P(A \mid B_i) = P(A)$, cela montre que B_i n'est pas une cause influente sur A.

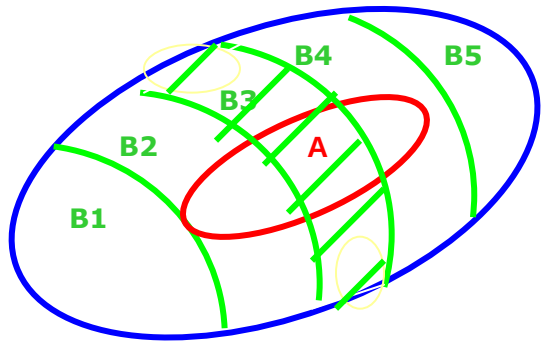
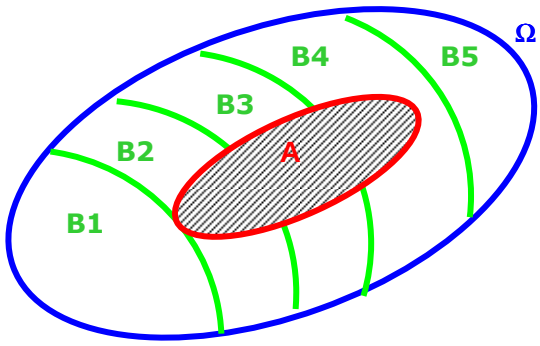
La relation 1 nous dit que la présence conjointe de la cause B_i et de l'effet A est égale à la probabilité que la cause B_i soit présente, multipliée par la probabilité que cette cause produise l'effet A. Elle nous permet d'écrire le théorème des probabilités totales sous la forme **:**

$$P(A) = \sum_i P(A \text{ et } B_i) = \sum_i P(A \mid B_i) P(B_i) \quad (3)$$

Remarque : *Les évènements* B_i *sont disjoints mais ne sont pas indépendants. En effet* $P\left(B_i \middle| B_j\right) = 0$ *lorsque* $i \neq j$

A.3 Approche bayésienne

L'objectif de l'approche bayésienne est d'inverser les probabilités conditionnelles de $P(A \mid B_k)$ en $P(B_k \mid A)$. Dans une approche causale, cela revient à évaluer la probabilité d'une cause possible B_i sachant que l'effet A s'est réalisé.

	
La cause B3 est présente. On peut en déduire la probabilité de l'effet $P(A\|B_3)$	*L'effet A s'est produit. Quelle est la probabilité* $P(B_3\|A)$ *que l'évènement* B_3 *en soit la cause ?*

- **Première formule de BAYES**

Le théorème de Bayes permet de réaliser assez simplement cette inversion. En effet, par raison de symétrie, la relation (1) s'écrit aussi

$$P(A \text{ et } B_k) = P(B_k \text{ et } A) = P(B_k \mid A)P(A) \quad (4)$$

En égalant (2) et (4) on obtient : $P(B_k \mid A)P(A) = P(A \mid B_k)P(B_k)$

dont on déduit la première formule du théorème de Bayes :

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{P(A)} \quad .. (5)$$

- **Deuxième formule de BAYES**

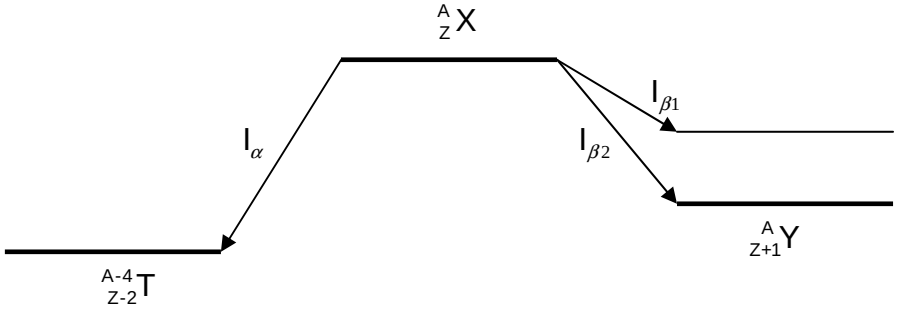
En écrivant $P(A)$ suivant sa décomposition sur les B_i (théorème des probabilités totales) on obtient :

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \text{ et } B_k)}{P(A)} = \frac{P(A \text{ et } B_k)}{\sum_i P(A \text{ et } B_i)}$$

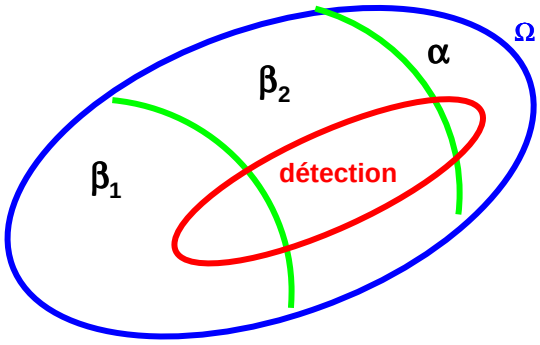
Or $P(A \text{ et } B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$ pour toute valeur de i. On en déduit la seconde formule de Bayes :

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i \left[P(A|B_i)P(B_i)\right]} \quad \textbf{(6)}$$

Exemples d'applications à des cas discrets : discrimination probabiliste de particules émises par un radionucléides



Considérons un radionucléide que se désintègre soit suivant un mécanisme α soit suivant une désintégration isobarique β^- avec deux composantes β_1^- et β_2^-.
On connaît pour chacune de ces possibilités les intensités d'émissions :



$$P(\alpha) = I_\alpha = 47\%$$
$$P(\beta_1) = I_{\beta_1} = 12\%$$
$$P(\beta_2) = I_{\beta 2} = 41\%$$

On peut construite un espace probabilisé Ω correspondant une désintégration avec une décomposition $\Omega = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ puisque $I_\alpha + I_{\beta_1} + I_{\beta_2} = 100\%$. En effet ici les trois intensités sont en rapport de branchement, et aucune particule ne peut être émise en coïncidence avec une autre (évènements disjoints). On utilise un compteur de particule chargée pour mesurer une source contenant ce radionucléide. On connaît les rendements de détection vis-à-vis de chacune de ces composantes :

$$P(\text{det.}\,|\,\alpha) = \varepsilon_\alpha = 2\%$$
$$P(\text{det.}\,|\,\beta_1) = \varepsilon_{\beta_1} = 5\%$$
$$P(\text{det.}\,|\,\beta_2) = \varepsilon_{\beta_2} = 8\%$$

On peut alors s'intéresser à la probabilité $P(\alpha\,|\,\text{det.})$ qu'une détection (l'effet) corresponde à une particule alpha (la cause). L'application de la seconde formule de Bayes permet d'écrire

$$P(\alpha\,|\,\text{det.}) = \frac{P(\text{det.}\,|\,\alpha)P(\alpha)}{P(\text{det.}\,|\,\alpha)P(\alpha) + P(\text{det.}\,|\,\beta_1)P(\beta_1) + P(\text{det.}\,|\,\beta_2)P(\beta_2)} = \frac{\varepsilon_\alpha I_\alpha}{\varepsilon_\alpha I_\alpha + \varepsilon_{\beta_1} I_{\beta_1} + \varepsilon_{\beta_2} I_{\beta_2}}$$

Application numérique :

$$P(\alpha\,|\,\text{det.}) = \frac{\varepsilon_\alpha I_\alpha}{\varepsilon_\alpha I_\alpha + \varepsilon_{\beta_1} I_{\beta_1} + \varepsilon_{\beta_2} I_{\beta_2}} = \frac{2\% \times 47\%}{2\% \times 12\% + 5\% \times 12\% + 8\% \times 41\%} = 20\%$$

A.4 Théorème de Bayes appliqué à des lois de probabilités

Une variable aléatoire X, dont les réalisations sont notées x, est caractérisée par une loi de probabilité. Cette loi elle-même est à son tour caractérisée par un ensemble de paramètres notés usuellement $\{\theta\}$.

Exemples :

Loi normale ou loi de Gauss : la loi normale est une loi d'une variable continue x définie sur $\mathbb{R}$ .Ses paramètres sont l'espérance μ (moyenne vraie) et l'écart-type σ. La loi de probabilité d'une variable gaussienne (densité de probabilité) s'écrit :

$$f(x \mid \theta) = f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Pour une variable gaussienne, l'espérance μ peut être positive ou négative ou nulle.

Loi de Poisson : la loi de Poisson est une loi d'une variable entière positive définie sur $\mathbb{N}^+$. C'est une loi dont le paramètre unique est l'espérance μ. La loi de probabilité d'une variable de Poisson (distribution) s'écrit :

$$f(x \mid \theta) = P(N \mid \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^N}{N!}$$

Pour une variable de Poisson, l'espérance μ ne peut être que positive ou nulle. Dans une perspective de causalité, la valeur vraie du mesurande peut être modélisée par l'espérance μ, alors que la réalisation x ou N de la variable peut-être entendue comme le résultat d'une mesure. A ce titre la loi générale $f(x \mid \theta)$ représente la loi de dispersion des mesures « sachant les valeurs vraies ». L'intérêt de l'approche bayésienne est de pouvoir inverser, sous certaines conditions, cette loi afin d'obtenir la loi de probabilité des valeurs vraies sachant une ou plusieurs valeurs de mesures x_i :

$$h(\theta_0 \mid x_i) = \frac{f(x_i \mid \theta_0) f(\theta_0)}{\int_\theta f(x_i \mid \theta) f(\theta) d\theta} = C f(x_i \mid \theta_0) f(\theta_0)$$

Dénomination :

- $h(\theta_0 \mid x_i) = \frac{f(x_i \mid \theta_0) f(\theta_0)}{\int f(x_i \mid \theta) f(\theta) d\theta}$: la loi (densité) de probabilité *a posteriori* des paramètres sachant les valeurs de mesures,
- $h(\theta_0 \mid x_i) = f(x_i \mid \theta_0)$: la fonction de vraisemblance des paramètres en fonction des mesures obtenues,
- $h(\theta_0 \mid x_i) = f(\theta_0)$: la loi de probabilité des paramètres *a priori*, avant acquisition des mesures (prior function),
- $C = 1 \Big/ \int f(x_i \mid \theta) f(\theta) d\theta$: la constante de normalisation assurant une surface totale de 100 % de la loi a posteriori.

Le point clé de l'inversion bayésienne réside dans la fonction de vraisemblance $f(x_i \mid \theta_0)$. Telle quelle, elle semble ne pas présenter de différences avec la loi de dispersion des mesures. Les différences ne résident pas dans l'expression analytique, mais bien plutôt dans le changement de statut des variables et des paramètres : le ou les paramètres figés de la loi de dispersion deviennent

des variables dans la fonction de vraisemblance, alors que la variable x devient un paramètre figé dans la fonction de vraisemblance.

Application : test de vraisemblance entre deux hypothèses

On se place dans l'hypothèse usuelle d'une dispersion normale des mesures. Considérons une valeur mesurée $x_1 = 12$. Supposons que l'on soit amené à trancher entre deux hypothèses **:**

Hypothèse 1 : le système est modélisé par la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 10; \sigma = 1)$

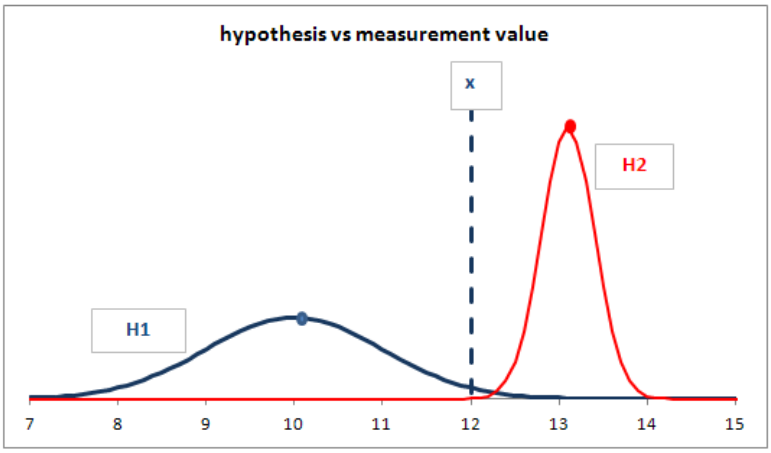
Hypothèse 2 : le système est modélisé par la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 13; \sigma = 0,3)$

La valeur de vraisemblance du couple $\{\mu = 10; \sigma = 1\}$ est égale à $f(x = 12 | \mu = 10; \sigma = 1) = 0,054...$

De même, la valeur de vraisemblance du couple $\{\mu = 13; \sigma = 0,3\}$ est égale à :

$f(x = 12 | \mu = 13; \sigma = 0,3) = 0,005..$

Avec une mesure égale à 12, le rapport des valeurs de vraisemblance de l'hypothèse 1 à l'hypothèse 2, de l'ordre de 10, indique que l'hypothèse 1 est considérablement plus vraisemblable, ce qui permet « selon toute vraisemblance », d'accepter l'hypothèse 1 et de rejeter l'hypothèse 2, bien que la mesure soit plus proche de la moyenne vraie de l'hypothèse 2. C'est sur ce principe simple et intuitif que repose, d'une part, l'une des applications du seuil de décision (rejet d'hypothèse), et d'autre part, l'idée qu'il est possible de construire un estimateur en recherchant les paramètres qui maximisent la fonction de vraisemblance : le maximum de vraisemblance (MV).



Hypotheses 1 et 2 vs x=12

En prenant toutes les valeurs possibles de $\{\mu ; \sigma\}$, en faisant ainsi jouer à ces paramètres le rôle de variables, on obtient une loi de vraisemblance fonction des deux variables $\{\mu ; \sigma\}$, paramétrée par le résultat de la mesure ou des mesures. On voit ici l'inversion des rôles « variable » et « paramètre » entre l'approche directe fréquentiste et l'approche inverse bayésienne.

ANNEXE B

INCERTITUDE DANS LE FORMALISME BAYESIEN

A.1 Loi a posteriori associée à une mesure unique x_1

Nous nous placerons dans ces exemples sous l'hypothèse I du caractère gaussien des variables.

a)Ecart-type inconnu *a priori*

Au risque de paraître trivial, rappelons que l'on ne peut pas estimer d'écart-type de dispersion à partir d'une mesure unique x_1. Rien n'empêche toutefois de construire la fonction de vraisemblance $f(x_1|\mu;\sigma)$ pour tous les couples possibles $\{\mu;\sigma\}$. Le maximum de vraisemblance s'obtient alors asymptotiquement avec une loi normale, centrée sur x_1 avec un écart-type tendant vers 0 : $\mathcal{N}_{MV}(\mu = x_1;\sigma \to 0)$, tendant ainsi vers un pic de Dirac $\delta(x - x_1)$. Ainsi, en l'absence de toute information sur la dispersion σ des mesures, la valeur la plus vraisemblable est la valeur de mesure, sans autre forme d'information. Ce qui ne fait guère avancer le débat L'approche bayésienne est dans ce cas assez stérile. Mais cet exemple n'est pas inutile car il montre la nécessité de connaître, d'une façon ou d'une autre, l'écart-type de dispersion.

b) Ecart-type connu *a priori*

Supposons que l'écart-type de dispersion σ soit connu a priori sans incertitude, par des mesures antérieures ou des informations du constructeur etc., Cet écart-type $\sigma = \sigma_0$ n'est plus alors une variable de la fonction de vraisemblance. Dans ce cas là, le théorème de Bayes permet d'obtenir une loi de probabilité a posteriori de la seule variable μ, c'est-à-dire une loi de probabilité de la valeur vraie du mesurande :

$$h(\mu|x_1;\sigma_0) = C f(x_1|\mu;\sigma_0) f(\mu)$$

Avec une loi a priori uniforme, cette loi de probabilité de μ n'est autre qu'une loi normale $\mathcal{N}(\mu = x_1;\sigma_0)$, centrée sur la valeur de mesure x_1 et d'écart-type σ_0. Le maximum de vraisemblance est obtenu là encore pour $\mu = x_1$, mais d'autres valeurs vraies sont possibles. A partir d'une telle densité de probabilité, on peut calculer pour tout intervalle $[a,b]$ la probabilité que la valeur vraie se trouve dans cet intervalle :

$$P(\mu \in [a,b]) = \int_a^b h(\mu|x_1;\sigma_0)\, d\mu$$

Mais il faut garder à l'esprit que cette loi est la loi de probabilité d'une variable aléatoire qui ne modélise plus une fluctuation physique, mais le manque de connaissance que nous avons sur la position de la valeur vraie par rapport à la valeur de mesure, c'est-à-dire l'incertitude associée à l'estimation de la valeur vraie par la valeur de mesure. Nous sommes ici au point focal du concept d'incertitude. Chaque réalisation d'une telle variable aléatoire, que l'on pourrait obtenir par simulation, se situe bel et bien dans l'espace des valeurs vraies, et représente une valeur possible de la valeur vraie, c'est à dire une nouvelle estimation $\hat{\mu}$ possible de la valeur vraie. La valeur particulière $\hat{\mu} = x_1$

n'est autre que l'estimateur du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire l'estimation la plus probable de la valeur vraie compte-tenu des mesures. L'écart-type de la loi, numériquement égal à l'écart-type initial de dispersion σ_0, n'est autre que l'incertitude-type u. On retrouve ici le concept d'incertitude de type B, associé à une mesure unique, avec $\mathbf{u = \sigma_0}$.

A.2 Fonction de vraisemblance associée à un échantillon de mesure

a) Ecart-type σ_0 inconnu a priori

La fonction de vraisemblance $f\left(\{x_i\}\middle|\mu;\sigma;I\right)$ associée à un échantillon de mesures $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ se construit à partir de chaque fonction de vraisemblance individuelle $\mathcal{N}\left(x_i\middle|\mu;\sigma;I\right)$ en formant le produit : $f\left(\{x_i\}\middle|\mu;\sigma;I\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}\left(x_i\middle|\mu;\sigma;I\right)$

Avec une loi a priori constante, on obtient une loi a posteriori des deux variables μ et σ :

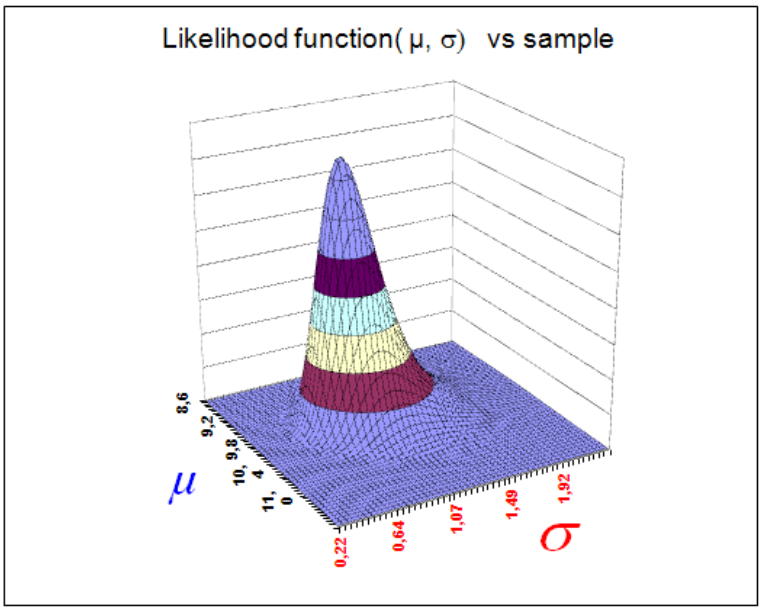
$$h\left(\mu;\sigma\middle|\{x_i\};I\right) = C\prod_{i=1}^{n} \mathcal{N}\left(x_i\middle|\mu;\sigma;I\right)$$

Cette loi permet une estimation conjointe du maximum de vraisemblance du mesurande et de l'écart-type de dispersion inconnu a priori, mais implicitement contenu dans l'échantillon.

Exemple : avec l échantillon de mesures:

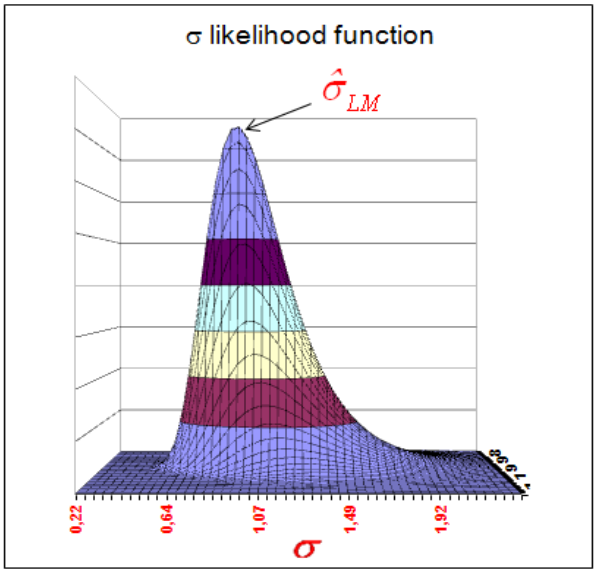
$$\{10.12\ ;\ 7.98\ ;\ 9.63\ ;\ 9.42\ ;9.70\ ;\ 10.28\ ;\ 11.02\ ;\ 10.06\ ;\ 10.85\ ;\ 8.36\}$$

et toujours sous hypothèse gaussienne, on obtient la loi de vraisemblance suivante :

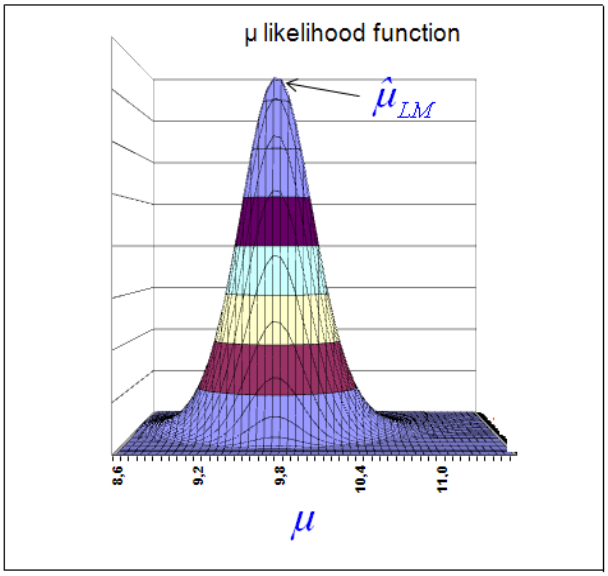


Le maximum de vraisemblance pour μ est égal à $\hat{\mu}_{MV} = 9,74$, égal à la moyenne arithmétique. Pour l'écart-type de dispersion, l'estimation par maximum de vraisemblance donne $\hat{\sigma}_{MV} = 0,93$, différent de l'écart-type expérimental en raison de la dissymétrie de la loi de probabilité. L'intérêt de la fonction de vraisemblance serait limité si l'on s'arrêtait à ces estimateurs ponctuels. A partir de la loi a

posteriori à deux variables $h\left(\mu;\sigma\left|\{x_i\};I\right.\right)$, on peut obtenir les lois de probabilité individuelles de $h\left(\mu\left|\{x_i\};\hat{\sigma}_{MV};I\right.\right)$ et $h\left(\sigma\left|\{x_i\};\hat{\mu}_{MV};I\right.\right)$ en coupant la loi $h\left(\mu;\sigma\left|\{x_i\};I\right.\right)$ suivant les plans respectivement $\sigma=\hat{\sigma}_{MV}$ et $\mu=\hat{\mu}_{MV}$:



Loi de l'écart-type



Loi de la moyenne

On peut montrer que dans ce cas particulier :

La loi $h\left(\mu\left|\{x_i\};\hat{\sigma}_{MV};I\right.\right)$ est une loi de Student de degré $n-1$: $T\left(\dfrac{\mu-\overline{x}_n}{\left(s_{ex}/\sqrt{n}\right)},n-1\right)$, avec n la taille échantillon.

On retrouve ici la définition de l'incertitude type de type A égale ici à : $u=\dfrac{s_{ex}}{\sqrt{n}}$.

La loi $h\left(\sigma\left|\{x_i\};\hat{\mu}_{MV};I\right.\right)$ est une loi de Khi-2 de degré n : $\chi^2\left(n\dfrac{\sigma^2}{s^2_{\exp}},n\right)$.

On en déduit que l'incertitude sur l'écart-type est de l'ordre de : $u_\sigma=\dfrac{s_{ex}}{\sqrt{2(n-1)}}$

b) Ecart-type σ_0 connu a priori

Dans ce cas-là, la loi a posteriori se construit plus simplement comme une loi de la seule variable μ à partir des lois de vraisemblance individuelles, et l'on obtient une loi a posteriori normale :

$$h\left(\mu\left|\{x_i\};\sigma_0;I\right.\right)=\prod_{i=1}^{n}\mathcal{N}\left(x_i\left|\mu;\sigma_0;I\right.\right)=\mathcal{N}\left(\mu\left|\overline{x}_n;\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}};I\right.\right)$$

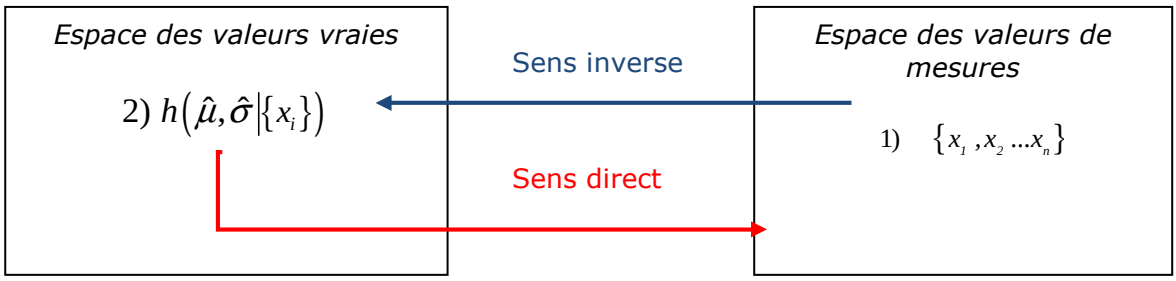
On retrouve ici l'incertitude usuelle de type A. : $\mathbf{u=\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$

La différence avec le cas précédent apparaît lorsque l'on souhaite construire des incertitudes élargies : lorsque l'écart-type n'est pas connu a priori, les intervalles de confiance, pour un même niveau de confiance, sont plus larges (fractiles de Student). L'incertitude sur l'écart-type se répercute sur l'incertitude sur la moyenne vraie. On retrouve à nouveau l'importance de connaître au mieux l'écart-type de dispersion.

A.3 Loi de probabilité de la n+1ème mesure connaissant les n premières mesures

Lorsque l'on a obtenu un échantillon de n premières mesures, on peut se poser la question de savoir quelle est la loi de probabilité de la $n+1^{ème}$ mesure. Cette loi est une loi de probabilité fréquentiste qui peut se construire à partir des paramètres estimés $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$, mais qui doit intégrer les incertitudes sur ces paramètres. Cette démarche met successivement en œuvre tout d'abord le sens inverse pour déterminer les lois de probabilités des paramètres « sachant les valeurs de mesures », puis ensuite le sens direct pour déterminer la loi de la variable « sachant les lois de probabilités des paramètres vrais ». Cette seconde étape nécessite là encore de mettre en œuvre le théorème de Bayes. On voit ainsi que la mise en œuvre du formalisme bayésien ne concerne pas exclusivement les lois de probabilités des seuls paramètres, mais peut s'intéresser aussi à des probabilités de natures fréquentistes. On peut montrer, toujours sous hypothèse gaussienne, que la loi de la $n+1^{ème}$ mesure sachant les n premières est une loi d Student de degré n :

$$f\left(x_{n+1}\middle|\{x_i\}\right) = T\left(\frac{x - \overline{x}_n}{s_{exp}}; n\right)$$



Ce scénario n'est pas un cas exotique, puisque c'est dans ce cadre là que les seuils de décision en mesure nucléaires sont déterminés. En effet il sera nécessaire de construire la loi de probabilité fréquentiste du comptage de bruit de fond, brut ou net, en partant bien entendu de premières valeurs de mesures. Nous verrons alors que l'hypothèse poissonnienne permet de construire avec une assez grande précision une telle loi de distribution à partir d'une mesure unique, ce qui est assez exceptionnel.

ANNEXE C

LOI DE POISSON ET INVERSION BAYESIENNE

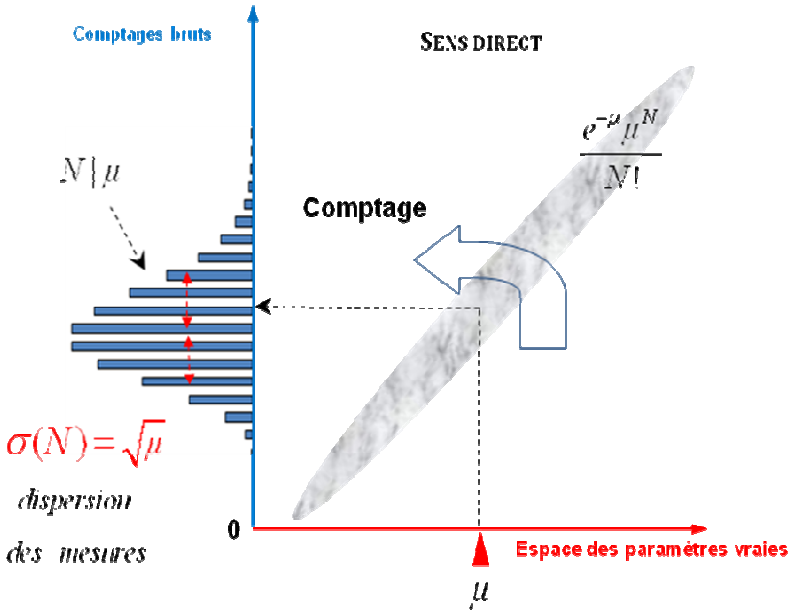
A.4 LOI DE POISSON ET ASPECT FREQUENTISTE

Les valeurs de comptages bruts N pour une même durée t_s dans des conditions de répétabilité obéissent à une statistique de Poisson dont la loi de distribution est :

$$P(N|\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^N}{N!} \quad (1)$$

Cette loi permet de connaître la probabilité d'obtenir un comptage égal à N « sachant la valeur vraie μ ». En effet le paramètre μ unique de la loi de Poisson n'est autre que l'espérance de la variable N, l'espérance n'étant autre que la moyenne d'un nombre infinie de mesures : $E(N) = \bar{N}_\infty = \mu$.

La loi de Poisson décrit ainsi la dispersion des mesures autour de la moyenne vraie. Les probabilités données par la loi de Poisson sont des probabilités fréquentistes, accessibles à la mesure.Dans une perspective de causalité, la loi de Poisson permet de connaître la loi des effets : N, sachant la cause : μ.



Les propriétés fondamentales de la loi de Poisson sont :

- les valeurs de N sont des valeurs entières positives ou nulles,
- le paramètre μ est un nombre réel positif ou nul,
- l'écart-type vrai de la variable N est égal à : $\sigma_N = \sqrt{\mu}$.

A.5 INVERSION BAYESIENNE ET LOI GAMMA

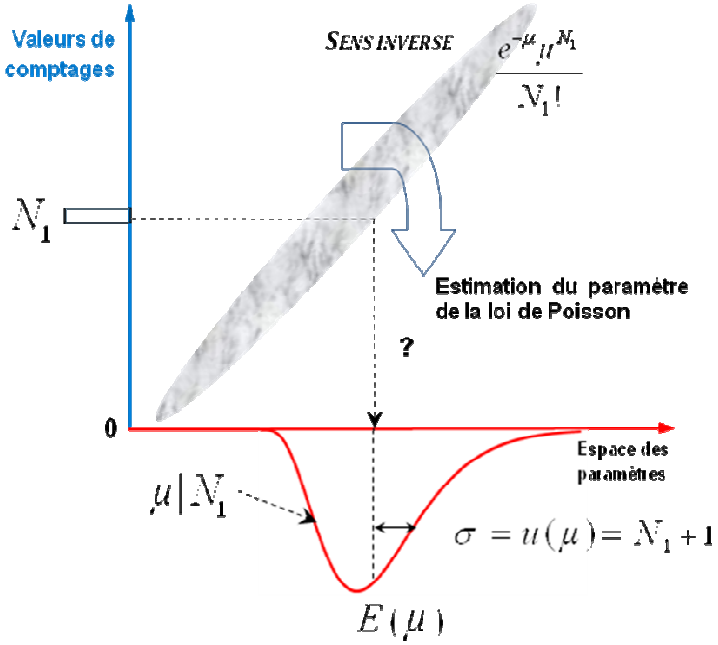
Lorsqu'une valeur de comptage brut N_1 est connue, le théorème de Bayes permet d'inverser la loi de Poisson afin d'obtenir la loi de probabilité du paramètre μ. Avec une loi de probabilité *a priori* uniforme sur μ, on obtient la densité de probabilité:

$$P(\mu \mid N_1) = \frac{e^{-\mu}\mu^{N_1}}{N_1!}$$

Malgré sa similitude formelle avec la loi de Poisson, cette loi est un loi de la variable continue μ. La valeur de comptage joue ici le rôle d'un paramètre figé. Cette loi est une loi gamma $G(\alpha,\beta)$ de paramètres $\alpha = N_1 + 1$ et $\beta = 1$. Ses propriétés remarquables sont :

- $E(\mu) = N_1 + 1$
- $Var(\mu) = N_1 + 1$

Cette loi n'étant pas symétrique, le maximum de vraisemblance est égal à N_1



Par définition, l'écart-type de cette loi représente l'incertitude-type sur le paramètre μ soit :

$$u(\mu) = \sqrt{Var(\mu)} = \sqrt{N_1 + 1}$$

A.6 LOI DE PROBABILITE D'UNE SECONDE MESURE CONNAISSANT UNE PREMIERE MESURE

Le seuil de décision se construit à partir de la distribution des valeurs de mesures sous hypothèse H_0. Mais cette distribution est en général estimée à partir d'une mesure unique de brut de fond BkG_1. Cette mesure unique permet dans un premier temps de déterminer la loi gamma du paramètre μ représentant l'incertitude sur ce paramètre. Il faut dans un second temps, à partir de cette loi,

construire la loi des valeurs de comptages BkG_2 «sachant BkG_1 ». Cette loi se construit en appliquant à nouveau le théorème de Bayes. Toujours avec des priors uniformes, on obtient :

$$P(BkG_2 | BkG_1; H_0) = \frac{1}{2^{BkG_1+BkG_2+1}} \frac{(BkG_1+BkG_2)!}{BkG_1!BkG_2!}$$

Cette loi discrète est une loi binomiale négative, appelée plus explicitement loi de mélange gamma-Poisson, définie pour tout entier positif ou nul. Les opérateurs espérance et variance de cette loi sont :

- $E([BkG_2]) = BkG_1 + 1$
- $Var([BkG_2]) = 2(BkG_1 + 1)$

Cette variance est le double de la variance de la loi de Poisson car elle tient compte à la fois de la dispersion poissonienne et de l'incertitude sur le paramètre μ .

A.7 SEUIL DE DECISION SUR UNE STATISTIQUE DE COMPTAGE BRUT

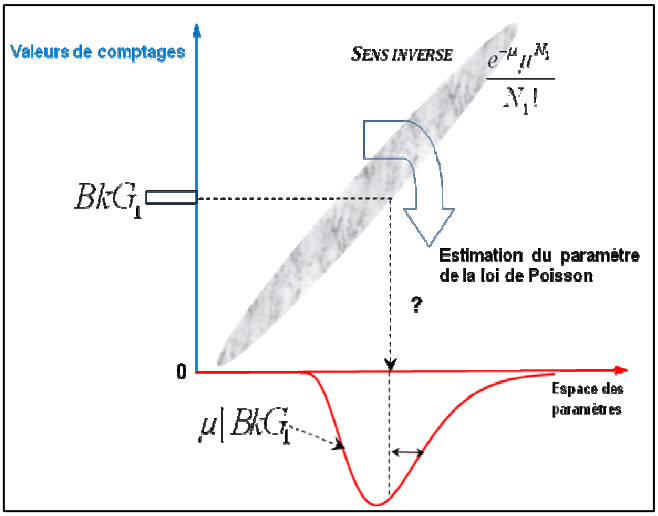
Bien que l'usage soit de calculer un seuil de décision sur une statistique nette obtenue par correction de bruit de fond, il est tout à fait possible de calculer un seuil de décision sur une statistique brute. La loi de mélange gamma lambda permet de déterminer ce seuil de décision à partir d'une mesure unique de bruit de fond :
Le seuil de décision y^* associé à un risque α donné est :

$$P(BkG_2 \geq y^* | BkG_1; H_0) = \sum_{BkG_2 > Lc} \frac{1}{2^{BkG_1+BkG_2+1}} \frac{(BkG_1+BkG_2)!}{BkG_1!BkG_2!} = \alpha$$

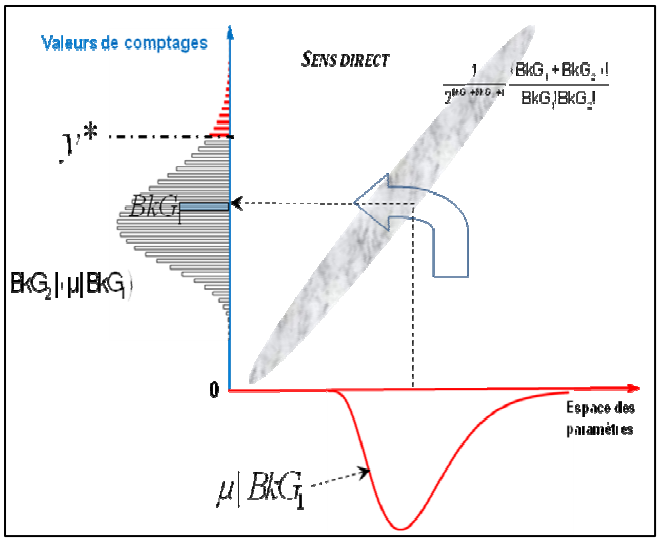
La valeur de y^* se calcule plus simplement, dans une modélisation mécaniste, comme :

$$y^* = Lc(Gross) \approx E([BkG_2]) + k_{1-\alpha}\sqrt{Var([BkG_2])} = BkG_1 + 1 + k_{1-\alpha}\sqrt{2(BkG_1+1)}$$

avec $k_{1-\alpha}$ le quantile de la loi normale.



Mesure unique vers loi paramètre



loi paramètre vers loi mesures

Ce résultat permet de calculer un seuil de décision lorsque le comptage unique de bruit de fond est nul : $BkG_1 = 0 \Rightarrow Lc(Gross) \approx 4$

Annexe D

Principe du calcul du seuil de décision a partir d'une estimation unique du bruit de fond

D.1 VARIANCE SOUS HYPOTHESE H0 ET FORMULE DU SEUIL DE DECISION

Par construction, le seuil de décision est établi à partir de la distribution des valeurs de mesures sous hypothèse H0

$$y^* = k_{1-\alpha}\sqrt{Var\left(Y_m \mid H_0\right)}$$

La valeur de la mesure sous hypothèse se construit comme

$$y \mid H_0 = \frac{net}{\theta\varepsilon\, t_s} = \frac{b_s - \hat{b}_s}{\theta\varepsilon\, t_s}$$

avec :

- b_s : la valeur de comptage de bruit de fond pour la durée t_s. Cette valeur de comptage suit une statistique de Poisson
- $\hat{b}_s$: la valeur de comptage estimée à partir d'une mesure de bruit $b(t_0)$ de fond pendant t_0 et ramené au temps t_s suivant la relation $\hat{b}_s = b(t_0)t_s/t_0 = b(t_0)/n$. Cette valeur ne suit pas une statistique de Poisson si $n \neq 1$

Dans les deux cas, les variances de ces variables doivent être estimées à partir d'une mesure unique $b_1(t_0)$

Estimation des variances à partir d'une mesure unique b_0

1) **Variance de b_s sachant $b_1(t_0)$**

Conformément à l'annexe C *(+ Vivier-Aupiais 2007*) , la variance du comptage de bruit poissonien est égale à

$$Var(b_s \mid b_1(t_0)) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\hat{b}_s + \frac{1}{n}\right)$$

Cette relation traduit essentiellement le caractère poissonien de b_s. Le terme $1/n$ (cf annexe C) traduit le fait que l'incertitude sur la valeur vraie du bruit de fond est réduite par une durée de comptage n fois plus grande..

2) **Variance de $\hat{b}_s$ sachant $b_1(t_0)$**

$$Var(\hat{b}_s \mid b_1(t_0)) = Var\left(\frac{b(t_0) \mid b_1(t_0)}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var\left(b(t_0) \mid b_1(t_0)\right) = \frac{2}{n^2}\left(b_1(t_0)+1\right) = \frac{2}{n}\left(\hat{b}_s + \frac{1}{n}\right)$$

3) **Covariance de $b_s \mid b_1(t_0)$ et $\hat{b}_s \mid b_1(t_0)$**

Ces deux variables qui incluent une part de variance liée à l'incertitude sur la valeur vraie du bruit de fond sont corrélés. En effet, même inconnue, la valeur vraie du bruit de fond est la même pour ces

deux variables. Cette incertitude disparait alors dans la différence de ces deux variables.

On peut montrer (Vivier –Aupiais 2007) que $Cov\left(b_s, \hat{b}_s \mid b_1(t_0)\right) = \frac{1}{n^2}\left(b_1(t_0)+1\right)$

On en déduit :

$$\mathrm{Var}\left(b_s - \hat{b}_s \mid b_1(t_0)\right) = \mathrm{Var}\left(b_s \mid b_1(t_0)\right) + \mathrm{Var}\left(\hat{b}_s \mid b_1(t_0)\right) - 2\mathrm{Cov}\left(b_s, \hat{b}_s \mid b_1(t_0)\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\hat{b}_s + \frac{1}{n}\right)$$

On en déduit la formule générale du seuil de décision :

$$y^* = k_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{H_0} = k_{1-\alpha}\sqrt{Var\left(Y_m \mid H_0\right)} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\hat{b}_s + \frac{1}{n}\right)} \Big/ \theta\varepsilon\, t_s$$

Cette expression se simplifie pour $\hat{b}_s > 10$:

$$y^* = k_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{H_0} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\hat{b}_s} \Big/ \theta\varepsilon\, t_s$$

Dans le cas courant $t_s = t_0$ l'expression du seuil se simplifie encore en considérant que $\hat{b}_s = b_0$:

$$y^* = k_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{H_0} = k_{1-\alpha}\sqrt{Var\left(Y_m \mid H_0\right)} = k_{1-\alpha}\sqrt{2\left(b_0+1\right)} \Big/ \theta\varepsilon\, t_s$$

Si $t_s = t_0$ et $\hat{b}_s > 10$ et $\alpha = 2{,}5\%$ le seuil se calcule simplement comme :

$$y^* \approx 2\sqrt{2b_0} \Big/ \theta\varepsilon\, t_s$$

D.2 EXPRESSION EQUIVALENTE DU SEUIL DE DECISION EN FONCTION DES DUREES DE COMPTAGE

On trouve dans la littérature d'autres expressions du seuil de décision tenant compte explicitement des durées de comptages. De plus ces formules utilisent les taux de comptages et non pas les valeurs de comptage. Le choix d'utiliser dans cette norme les valeurs de comptages et non pas les taux de comptages résultent des point suivants :

1) Les valeurs de comptages bruts obéissent à la statistique de Poisson, et pas les taux de comptages ;
2) La pluparts des techniques de mesures, spectrométrie notamment, utilisent préférentiellement les valeurs de comptages (surfaces)
3) Calculer un seuil de décision en termes de taux de comptage nécessite de connaitre le temps de comptage pour calculer implicitement la valeur de comptage

Nous allons montrer que ces expressions sont équivalentes aux expressions préconisées dans la présente norme

Expression alternative pour un seuil de décision en taux de comptage r_{net} :

$$y^*(r_{net}) = k_{1-\alpha}\sqrt{R_0\left(\frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_s}\right)}$$

Avec

- R_0 : taux de comptage de bruit de fond
- t_0 : temps de comptage bruit de fond
- t_s : temps de comptage échantillon (en toute rigueur il est préférable d'écrire t_s, avec « s » pour sample)

Retour à des valeurs de comptage poissonien :

- Bruit de fond : $BdF(t_0) = R_0 \times t_0$

- $n = \frac{t_0}{t_s}$
- $\overline{BdF}\,(ts) = BdF(t_0)/n$

Seuil de décision en termes de comptage net pour une durée de t_s :

$$y^*(net) = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\overline{BdF}\,(ts)} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{BdF(t_0)}{n}} \quad (2)$$

Pour passer au seuil de décision en termes de taux de comptages, il suffit de diviser (par t_s :

$$y^*(R_n) = \frac{y^*(net)}{t_s} = k_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{t_s^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{BdF(t_0)}{n}}$$

avec $\frac{1}{n} = \frac{t_s}{t_0}$ on retrouve :

$$\frac{1}{t_s^2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{t_s^2}\left(1+\frac{t_s}{t_0}\right) = \frac{1}{t_s}\left(\frac{1}{t_s}+\frac{1}{t_0}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{t_s^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{BdF(t_0)}{n} = \frac{1}{\cancel{t_s}}\left(\frac{1}{t_s}+\frac{1}{t_0}\right)\frac{BdF(t_0)\times\cancel{t_s}}{t_0} = \left(\frac{1}{t_s}+\frac{1}{t_0}\right)R_0$$

Donc on retrouve bien la formule $y^*(r_{net}) = k_{1-\alpha}\sqrt{R_0\left(\frac{1}{t_0}+\frac{1}{t_s}\right)}$

D.3 INCERTITUDE SUR LE SEUL DE DECISION

Quelle que soit la méthode utilisée pour calculé le seuil de décision, l'application pratique repose sur une valeur particulière du bruit de fond, réalisation d'une variable aléatoire. Le seuil de décision expérimental est donc lui aussi une réalisation particulière d'une variable aléatoire.

Exemple numérique *: avec un comptage de bruit de fond de 124 le seuil de décision est égal à 26 pour $\alpha = 5\%$. Nous aurions pu tout aussi bien avoir dans les mêmes conditions une valeur de comptage égale à 105 ce qui nous aurait donné un seuil de décision égal à 24.*

De fait, comme toute statistique, le seuil de décision expérimental n'est qu'une estimation du seuil de décision vrai . Cette incertitude se aisément en se rappelant que l'incertitude sur un écart-type estimé à partir d'un comptage poissonien est égal à $u_\sigma = 0,5$ quelle que soit la valeur de comptage .

Démonstration :

$$Demonstration: \quad \hat{\sigma} = \sqrt{N_1+1} \Rightarrow \frac{d\hat{\sigma}}{dN_1} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{N_1+1}} \Rightarrow d\hat{\sigma} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{N_1+1}}dN_1 \Rightarrow$$

$$Var([\sigma]) \approx \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{N_1+1}}\right)^2 Var([\mu]) \Rightarrow u(\hat{\sigma}) \approx \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{N_1+1}}u(\hat{\mu}) \quad with\ u(\hat{\mu}) = \sqrt{N_1+1} \Rightarrow u(\hat{\sigma}) \approx 0,5$$

pour $n = 1$ **(temps de comptages égaux), o**n montre que :

$$y^* = k_{1-\alpha}\hat{\sigma}_{H_0} = \sqrt{2}k_{1-\alpha}\,\hat{\sigma}(b) \Rightarrow u(y^*) = \sqrt{2}k_{1-\alpha}\,u(\sigma) = \frac{\sqrt{2}k_{1-\alpha}}{2} \approx 0,7k_{1-\alpha}$$

L'incertitude sur le seuil de décision est donc, pour un risque α déterminé, une constante, quelle que soit la valeur du bruit de fond. Pour **α = 2,5 %** et en prenant $k_{1-\alpha} \approx 2$ on obtient : $\boldsymbol{u_{SD} = 1,38}$.

$k_{1-\alpha}$ ne représente pas ici un facteur d'élargissement de l'incertitude. C'est une constante, pour α fixé**,** intervenant dans le calcul de l'incertitude-type. Cette dernière peut être élargie avec un facteur d'élargissement k « classique » indépendant de $k_{1-\alpha}$:

$$U\left(y^*_{net}\right) = k\,u\left(y^*_{net}\right) = 0,7\,k\,k_{1-\alpha}$$

Pour une incertitude élargie d'un facteur $k = 2$ (niveau de confiance 95 %), on obtient :

$U\left(y^*_{net}\right) \approx 2,8$ **quelle que soit la valeur de comptage du bruit de fond !**

Par contre l'incertitude **relative** sur le seuil de décision vaut :

$$u_{rel}(y^*) = \frac{u(y^*)}{y^*} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{BdF_1 + 1}}$$

L'incertitude relative sur le seuil de décision diminue lorsque le bruit de fond augmente, et réciproquement. Cette propriété nous montre que les problèmes de statistiques de comptage sont plus délicats lorsque les comptages sont faibles. Ainsi, pour un bruit de fond moyen de l'ordre de 10, l'incertitude relative sur la valeur du seuil de décision est égale à 31 %. Ceci nous montre que l'on aura tout intérêt à augmenter les temps de comptage pour diminuer ce type d'incertitude.

Pour $n \neq 1$ **(temps de comptages inégaux)**

$$u(y^*) = \frac{1}{2} \times k_{1-\alpha} \times \sqrt{\frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

L'incertitude **relative** sur le seuil de décision vaut :

$$u_{rel}(y^*) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\overline{BdF}\,(T_s) + 1}}$$

On constate que l'incertitude relative sur la valeur du seuil diminue et tend vers 0 lorsque le temps alloué à l'estimation du bruit de fond augmente, à temps de comptage échantillon identique. L'intérêt d'augmenter, lorsque cela est possible, le temps de mesure du bruit de fond permet donc à la fois de baisser la valeur du seuil de décision et d'augmenter la précision sur ce seuil. Ce gain est d'autant plus intéressant lorsque les valeurs de comptages sont faibles. Pour n = 10, le seuil de décision est ainsi divisé par 1,34 (-25 %) et l'incertitude relative sur ce seuil est divisée par un facteur 3 !

Annexe E

(indicative)

APPLICATIONS A DES MESURES PAR COMPTAGE SPECTROMETRIQUES

E.1 Aspects généraux

La présente Norme internationale peut également s'appliquer à des mesures par comptage spectrométriques lorsqu'une raie particulière d'un spectre multicanal mesuré doit être considérée et qu'aucun calcul d'ajustement, par exemple une déconvolution, ne doit être effectué.

Les logiciels mettent en œuvre des algorithmes de recherche de pics qui pour la plupart sont fondés la des recherches de formes : dérivées secondes, filtres gaussiens, test de Khi-2. Ces algorithmes possèdent leur propre seuil de décision, souvent paramétrables par l'utilisateur en termes de sensibilité. On peut considérer que dans les cas les plus simples (singlets), la décision de présence ou d'une raie par la mise en œuvre d'un seuil de décision s'appuyant, suivant la présente norme, sur des valeurs de comptages, fait partie des méthodes les plus sensibles fondées sur une recherche de forme. Un pic vu par un filtre gaussien sera généralement positif sur un test de seuil de décision conforme à la présente norme.
norme.

Un aspect important dans les techniques de spectrométrie est la largeur de la région d'intérêt (ROI) attribué à une énergie donnée (raie) La valeur de cette largeur a un impact sur la valeur du seuil de décision. Il est cependant considéré ici que le champ d'application de la norme ne doit pas imposer la valeur de cette largeur, car d'autres considérations sont susceptibles d'influencer le choix de l'opérateur. Seule des indications en termes d'optimisation du seuil de décision pourront être préconisées.

Suivant cette logique, la décision de l'absence d'une raie spécifique doit être confirmée par un test d'hypothèse mettant en œuvre la présente norme.

E.2 Seuil de décision basé sur une correction de bruit de fond sous pic

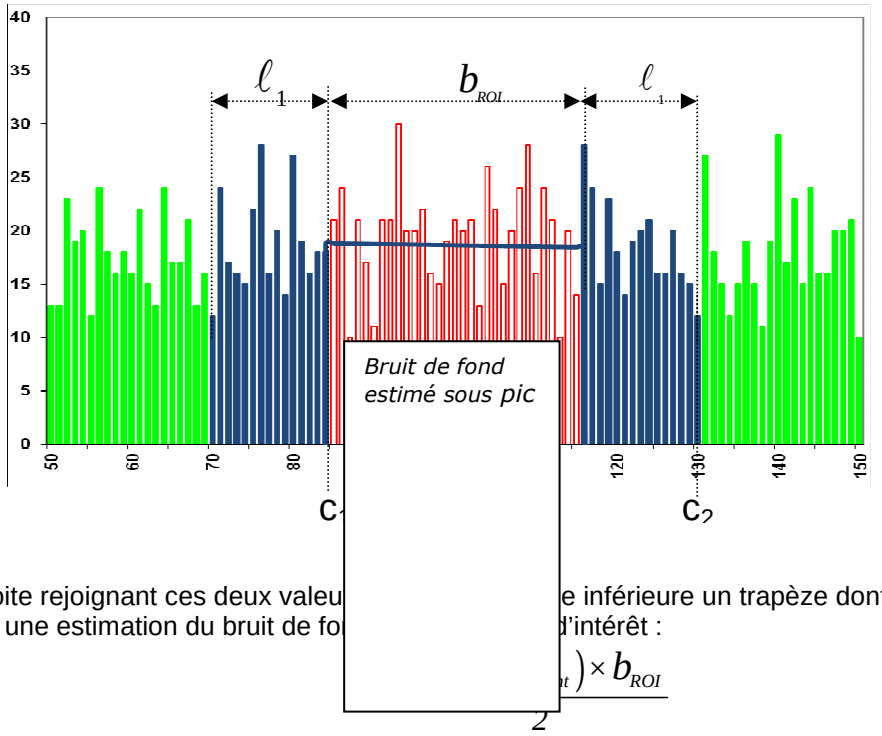
La particularité de la mesure par spectrométrie est la possibilité d'estimer le bruit de fond à partir de l'acquisition d'un spectre en présence de l'échantillon. Plusieurs méthodes d'estimation du bruit de fond sous pic sont possibles : trapèze, Galton…Pour des mesures à bas niveau avec des pics très peu formés, où il est alors nécessaire d'utiliser un seuil de décision, les différentes méthodes d'estimation du bruit de fond sous pic sont essentiellement équivalentes. Ainsi dans cette annexe ne sont préconisées que des estimations avec la méthode du trapèze. Pour les autres méthodes, il revient à l'opérateur de calculer le seuil de décision en déterminant la variance de la méthode utilisée.

Rappel sur la méthode du trapèze :

Largeur de la ROI en nombre de canaux : b_{ROI}

Le bruit de fond est estimé respectivement à gauche et à droite de la ROI comme la valeur moyenne du contenu d'un certain nombre de canaux (resp. ℓ_1 et ℓ_2)déterminé :

$$\bar{N}_{left} = \sum_{i=0}^{\ell_1} N(c_1 - i) \Big/ \ell_1 \text{ et } \bar{N}_{right} = \sum_{i=0}^{\ell_2} N(c_1 + i) \Big/ \ell_2$$



Une droite rejoignant ces deux valeu e inférieure un trapèze dont la surface est prise comme une estimation du bruit de fo d'intérêt :

$$\left.\right)\times b_{ROI}$$
$$2$$

Cas particulier 1 : $\ell_1 = \ell_2 = \ell \Rightarrow \hat{b} = \frac{b_{ROI}}{2\ell}\left(\sum_{i=0}^{\ell_1} N(c_1 - i) + \sum_{i=0}^{\ell_2} N(c_2 + i) + 1\right)$

Cette méthode est indifférente à l'existence ou non d'un pic dans la région d'intérêt.

Modèle de la mesure : $Y_m = \frac{Net}{\varepsilon t_s} = \frac{G - \hat{B}}{I_\gamma \varepsilon t_s}$

Modèle de la mesure sous l'hypothèse H_0 **:** $Y_m \mid H_0 = \frac{Net}{\varepsilon t_s} = \frac{B - \hat{B}}{I_\gamma \varepsilon t_s}$

Variance : $Var\left(Y_m \mid H_0\right) = \left(\frac{1}{\theta \varepsilon t_s}\right)^2 \left[Var\left(B\right) + Var\left(\hat{B}\right)\right]$

Calcul de la variance de $Y_m \mid H_0$ **:**

$Var\left(B\right) = \tilde{b}$ (comptage poissonien)

$$Var\left(\hat{B}\right) = \hat{V}ar\left[\frac{b_{ROI}}{2\ell}\left(\sum_{i=0}^{\ell_1} N(c_1 - i) + \sum_{i=0}^{\ell_2} N(c_2 + i) + 1\right)\right] = \left(\frac{b_{ROI}}{2\ell}\right)^2 Var\left[\left(\sum_{i=0}^{\ell_1} N(c_1 - i) + \sum_{i=0}^{\ell_2} N(c_2 + i)\right)\right]$$

$$= \left(\frac{b_{ROI}}{2\ell}\right)^2 \left(\sum_{i=0}^{\ell_1} \tilde{n}(c_1 - i) + \sum_{i=0}^{\ell_2} \tilde{n}(c_2 + i)\right) = \frac{\left(\sum_{i=0}^{\ell_1} \tilde{n}(c_1 - i) + \sum_{i=0}^{\ell_2} \tilde{n}(c_2 + i)\right) b_{ROI}}{2\ell} = \frac{b_{ROI}}{2\ell}\tilde{b}$$

On en déduit l'estimation de la variance à partir d'un bruit de fond sous pic expérimental $\hat{b}$:

$$\begin{cases} \hat{V}ar(B) = \hat{b} \\ \hat{V}ar(\hat{B}) = \dfrac{b_{ROI}}{2\ell}\hat{b} \end{cases} \Rightarrow \hat{V}ar(Y_m \mid H_0) = \left(\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\right)^2 \left[\hat{b} + \frac{b_{ROI}}{2\ell}\hat{b}\right] = \left(\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\right)^2 \hat{b}\left[1 + \frac{b_{ROI}}{2\ell}\right]$$

On en déduit $\hat{y}^* = k_{1-\alpha}\sqrt{\hat{V}ar(Y_m \mid H_0)} = k_{1-\alpha}\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\sqrt{\left[1 + \frac{b_{ROI}}{2\ell}\right]\hat{b}} = k_{1-\alpha}\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\sqrt{\left[1 + \frac{b_{ROI}}{2\ell}\right]\hat{b}}$

En notant $n = \dfrac{2\ell}{b_{ROI}}$ on obtient :

$$\hat{y}^* = k_{1-\alpha}\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\sqrt{\left[1 + \frac{1}{n}\right]\hat{b}}$$ (formule générale cf texte norme)

La valeur de n doit rester accessible à l'utilisateur.

OPTIMISATION :

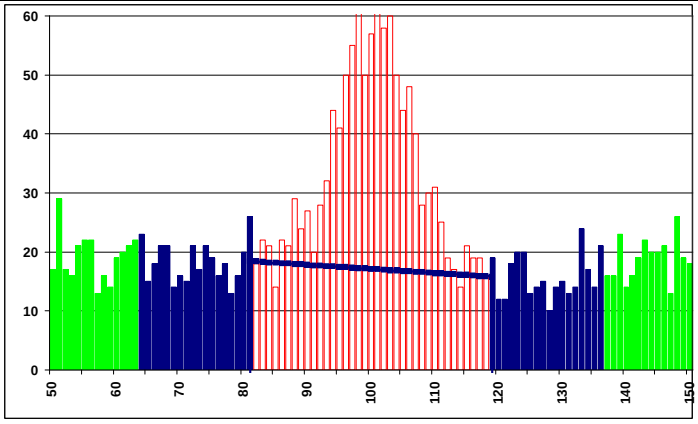
a) influence de la largeur de la ROI

- Des largeurs de ROI trop élevées de la Roi tendent à augmenter l'estimation du bruit de fond sous pic et par là la valeur du seuil de décision.
- Des largeurs de ROI trop faibles diminuent rapidement le rendement de détection.

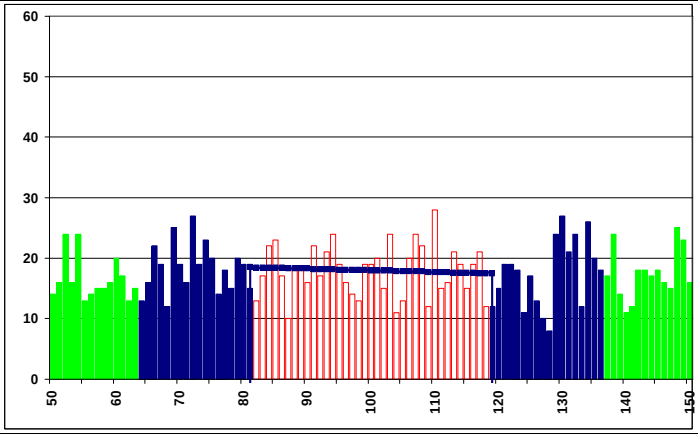
Il existe ainsi une largeur optimale de la ROI pour la détermination du plus petit seuil de décision possible. Les modèles utilisant des pics théoriques parfait et continus donne une largeur optimale $b = 2{,}5\,FWHM$. avec $FWHM$ la largeur totale à mi –hauteur en canaux (résolution) . En pratique, une telle largeur peut poser des problèmes en raison du caractère discret des spectres, ainsi que du caractère non gaussien des pics expérimentaux (traines).

Il est ainsi conseille de prendre une largeur minimale de précaution $b_{ROI} = 3\,FWHM$ On constate sur le graphe suivant qu'une telle largeur dégrade très faiblement le seuil de décision par rapport à l'optimum théorique.

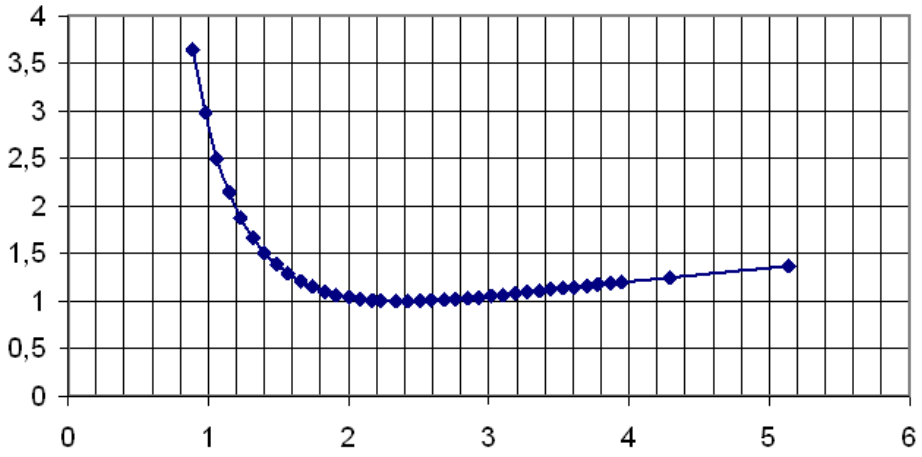
Remarque : la largeur de la ROI utilisé pour déterminer le seuil de décision ne peut pas être fonction de la présence d'un pic ou non. Une telle démarche consisterai à décider avant toute chose de la présence ou non d'un pic pour déterminer, en fonction de cette décision, une méthode ou une autre pour calculer un seuil permettant de décider si un pic est présent ou non.



ROI=3 LTMH, Cas pic présent : BdF=632 et y*=70



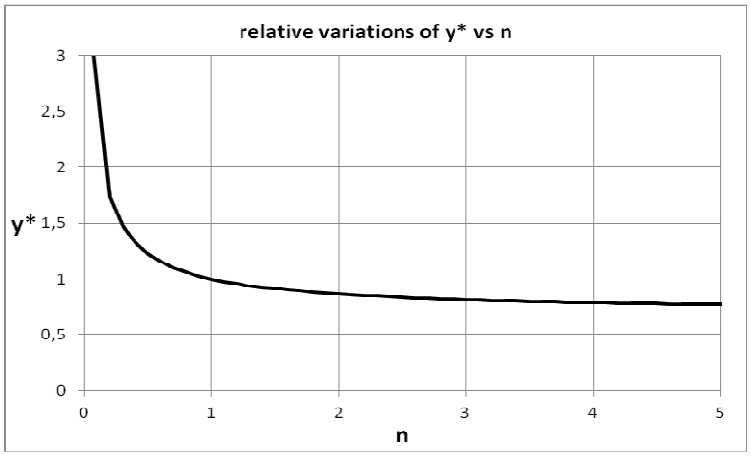
ROI =3 LTMHCas pic absent (hypothèse H0) : BdF= 664 et y*=71



Seuil de décision vs largeur ROI en termes de LTMH

b) Nombre de canaux utilisés à gauche et à droite pour déterminer le seuil de décision

La formule (XX) montre l'impact de ce nombre de canaux dans le calcul du seuil d décision. Il n'y a pas à proprement parler ici d'optimum puisque lorsque n augmente alors $\hat{y}*$ diminue.

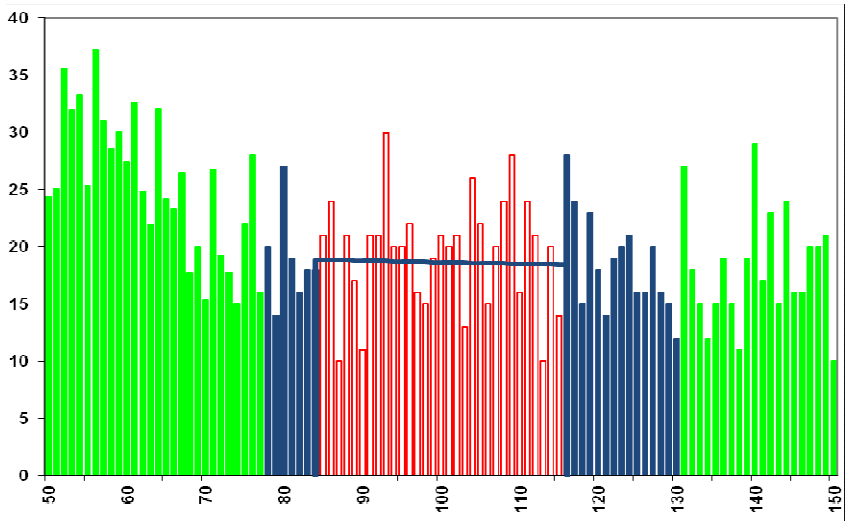


Le graphe (XX) montrant l'évolution relative de y* en fonction d en (normalisé à n=1) montre que :

Le seuil de décision augmente rapidement (dégradation) lorsque n devient inférieur à 1. Le seuil de décision diminue (amélioration) lorsque n devient supérieur à 1, mais très lentement. Le gain possible à partir de valeurs supérieures à 3 est négligeable (15 % max de 3 à n très grand). Il est donc conseillé de favoriser autant que faire se peut des valeurs de n comprises entre 1 et 3.Cela n'est pas toujours possible en raison notamment de la présence de pics dans l'environnement de la ROI. Il est ainsi parfois nécessaire dans ces cas là de prendre des largeurs ℓ_1 et ℓ_2 différentes

Cas particulier $\ell_1 \neq \ell_2$

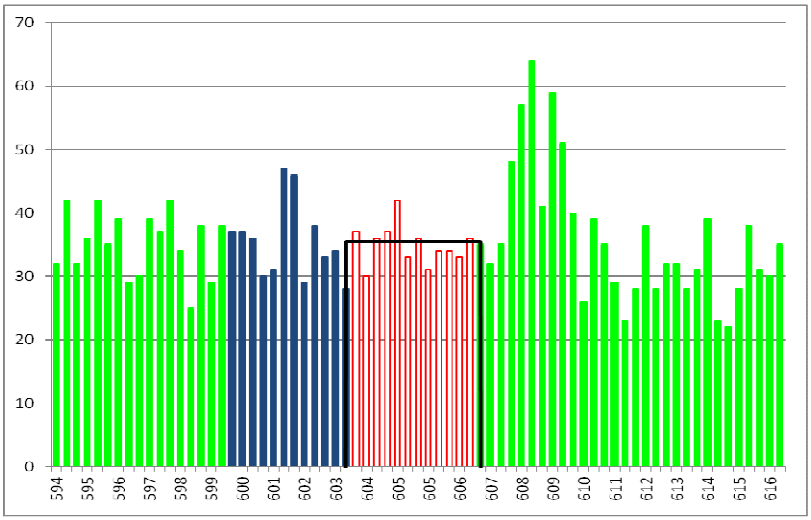
a) $\ell_1 \neq \ell_2$ non nuls



$$\hat{y}^* = k_{1-\alpha}\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\sqrt{\frac{b_{ROI}}{2}\left(\bar{N}_{left}+\bar{N}_{right}\right)+\left(\frac{b_{ROI}}{2}\right)^2\left(\frac{\bar{N}_{left}}{l_1}+\frac{\bar{N}_{right}}{l_2}\right)}$$

b) $\ell_1 = 0$ ou $\ell_2 = 0$

Exemple : recherche 604 kev (Cs 134) dans spectre de produit de fission



Le bruit de fond sous pic s'estime comme

$\hat{b} = \bar{N}\, b_{ROI}$ avec $\bar{N} = \bar{N}_{left}$ ou $\bar{N} = \bar{N}_{right}$

En notant $n = \dfrac{\ell}{b_{ROI}}$, un calcul de variance montre que l'on retrouve la relation :

$$\hat{y}^* = k_{1-\alpha}\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\sqrt{\left[1+\frac{1}{n}\right]\hat{b}}$$

E.3 Correction par un pic présent dans le bruit de fond ambiant

Dans certains cas, la raie d'intérêt peut correspondre à un pic présent dans le bruit de fond naturel. La surface nette d'une raie d'intérêt d'un spectre échantillon subit alors deux corrections :

- Correction 1 : bruit de fond sous pic (cf ci –dessus)
- Correction 2 : correction du pic présent dans un spectre de bruit de fond

On notera

Pour le spectre échantillon, en considérant le cas $\ell_1 = \ell_2 = \ell$

- temps de mesure t_S
- Marquage ROI : largeur b_{ROI}
- Rapport marquage : $n = \frac{2\ell}{b_{ROI}}$
- Estimation du bruit de fond sous pic spectre échantillon: $\hat{b}$ (formule trapèze)

Pour le spectre de bruit de fond , en considérant le cas $\ell_1' = \ell_2' = \ell'$

- temps de mesure t_0
- largeur ROI b'_{ROI}
- Rapport canaux : $n' = \frac{2\ell'}{b'_{ROI}}$
- Estimation du bruit de fond sous pic spectre brut de fond : $\hat{b}'$ (formule trapèze)
- Surface nette estimé $net' = g' - \hat{b}'$
- Rapport des temps de comptage : $n_t = \frac{t_0}{t_s}$

Modèle de la mesure : estimation surface nette du spectre échantillon après correction du bruit de fond sous pic et du pic présent dans le fond naturel :

$$Y_m = \frac{Net}{\varepsilon t_s} = \frac{G - \hat{B} - Net'/n_t}{I_\gamma \varepsilon t_s} =$$

Un calcul de variance montre alors que le seuil de décision s'écrit :

$$\hat{y}^* = k_{1-\alpha}\sqrt{\hat{V}ar\left(Y_m \mid H_0\right)} = k_{1-\alpha}\frac{1}{I_\gamma \varepsilon t_s}\sqrt{\left[1+\frac{1}{n}\right]\hat{b} + \frac{1}{n_t^2}\left[net' + \left[1+\frac{1}{n'}\right]\hat{b}'\right]}$$

Une valeur de mesure y supérieure à ce seuil permet de conclure à la présence significative du pic dans le spectre échantillon au delà de la seule contribution de l'environnement

Annexe F

Calcul limite de detection

F.1 Calcul limite de détection en termes de comptage net

Par souci de simplification, la détermination de la limite de détection sera calculée dans un premier temps :

- En termes de comptage net : $net = g - b$ avec $t_0 = t_S$
- En négligeant l'incertitude sur le rendement de comptage

Par construction la limite de détection est égale à : $y^{\#} = k_{1-\alpha}\sigma_{H_0} + k_{1-\beta}\sigma_{H_1}$

Avec : $k_{1-\alpha}\sigma_{H_0} = y^* = k_{1-\alpha}\sqrt{2(b+1)}$ et $\sigma_{H_1} = \sqrt{y^{\#} + 2(b+1)}$

Pour des risques α et β donnés on a :

$$y^{\#} = y^* + k_{1-\beta}\sqrt{y^{\#} + 2\times(b+1)} \text{ avec } y^* = k_{1-\alpha}\times\sqrt{2(b+1)} \quad \Rightarrow 2(b+1) = \frac{y^{*2}}{k_{1-\alpha}^2}$$

$$(y^{\#} - y^*)^2 = k_{1-\beta}^2\left(y^{\#} + \frac{y^{*2}}{k_{1-\alpha}^2}\right) \Rightarrow y^{\#2} + SD^2 - 2\,y^*\,y^{\#} - k_{1-\beta}^2\left(y^{\#} + \frac{y^{*2}}{k_{1-\alpha}^2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$y^{\#2} - \left(2y^{\#} + k_{1-\beta}^2\right)\times LD - \left(1 - \frac{k_{1-\beta}^2}{k_{1-\alpha}^2}\right)y^{*2} = 0$$

1er cas : $\alpha = \beta$ (risques égaux)

L'équation précédente se simplifie et l'on obtient :

$$y^{\#2} - \left(2y^* + k_{1-\beta}^2\right)\times y^{\#} - \left(1 - \frac{k_{1-\beta}^2}{k_{1-\alpha}^2}\right)y^{\#2} = 0 \Rightarrow \quad y^{\#2} - \left(2y^* + k_{1-\beta}^2\right)y^{\#} = 0$$

$$\Leftrightarrow \; y^{\#}_{(\alpha=\beta)} = k_{1-\beta}^2 + 2y^*$$

Application numérique :

- $Risque\,\alpha = Risque\,\beta = 2{,}5\% \Rightarrow k_{1-\alpha} = k_{1-\beta} \approx 2 \Rightarrow \quad y^{\#}_{(\alpha=\beta)} \approx 4 + 2y^*$
- $Risque\,\alpha = Risque\,\beta = 5\% \Rightarrow k_{1-\alpha} = k_{1-\beta} = 1{,}64 \Rightarrow \quad y^{\#}_{(\alpha=\beta)} \approx 2{,}7 + 2y^*$

Pour des valeurs de comptages assez élevées $(b > 1000)$ on a : $y^{\#}_{(\alpha=\beta)} \approx 2y^*$

2ème cas : $Risque\,\alpha \neq Risque\,\beta$ (risques asymétriques)

L'équation ne se simplifie plus et l'on obtient, par la méthode classique de résolution d'une équation du second degré :

$$y^{\#}_{(\alpha;\beta)} = \frac{1}{2} \times \left(2y^{*} + k^{2}_{1-\beta} + \sqrt{\left[2 \times y^{*} + k^{2}_{1-\beta} \right]^{2} - 4 \left[1 - \frac{k^{2}_{1-\beta}}{k^{2}_{1-\alpha}} \right] y^{*2}} \right)$$

F.2 Prise en compte incertitude sur rendement

Le problème consiste à déterminer $y^{\#}$ en tenant compte de l'incertitude u_{ε} sur le rendement vrai $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Le rendement peut alors être modélisé comme une variable $\boldsymbol{\varepsilon}$ de moyenne $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et d'écart-type absolu u_{ε} et relatif $\mathbf{u_{\varepsilon}/\varepsilon = u_{rel.\varepsilon}}$

La limite de détection $y^{\#}$, dans ce cas de figure, peut être déterminé en reprenant le problème à partir de la distribution des comptages nets possibles pour une source d'activité moyenne vraie déterminée. Soit $\tilde{A}$ cette activité. En raisonnant sur la limite de détection en termes de comptage net, le comptage net vrai moyen s'écrit :

$$\boldsymbol{\mu}_{g} = \tilde{\varepsilon}\, \tilde{A}\, t_{S}\,.$$

La valeur en limite de détection correspond à l'activité moyenne vrai telle que :

$$y^{\#}_{act.} = \tilde{A} \quad \Rightarrow y^{\#}_{net} = \tilde{\varepsilon}\; y^{\#}_{act.} \mathbf{t_S}\,.$$

L'incertitude sur le rendement peut être introduite en considérant la distribution du comptage net possible comme étant généré par une loi de Poisson de moyenne vraie variable :

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\, y^{\#}_{net} \text{ de densité de probabilité } f(\mu)$$

La loi de dispersion des comptages net dans ces conditions représente la distribution alternative H_1, centré paar construction sur $y^{\#}_{net}$ et d'écart-type $\boldsymbol{\sigma}_{H_1}$. Le calcul de l'écart-type $\boldsymbol{\sigma}_{H_1}$ peut se faire en considérant cette variable comme le produit de 2 variable : $\mathbf{[net]} = \left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right] \left[y^{\#}_{net} \right]$ avec :

- $\left[\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right]$ la variable réduite sur les rendements de moyenne 1 et d'écart-type relatif $\mathbf{u_{rel.\varepsilon}}$
- $\left[y^{\#}_{net} \right]$ une variable poissonnienne de moyenne $y^{\#}_{net}$ et de variance $y^{\#}_{net}$

La loi de composition des écart-types permet d'écrire pour un produit $\mathbf{[Y] = [X_1] \times [X_2]}$ de deux variables indépendantes (les dérivées secondes s'annulant):

$$\sigma^{2}_{Y} = \tilde{X}^{2}_{1} \sigma^{2}_{X_2} + \tilde{X}^{2}_{2} \sigma^{2}_{X_1}$$

Pour les variables définis comme précédemment on obtient :

$$\sigma_{Net} = \sqrt{\left(y^{\#}_{net} u_{rel.\varepsilon} \right)^{2} + y^{\#}_{net}}$$

En réintroduisant l'incertitude ramenée par la correction du bruit de fond net on obtient:

$$\sigma_{Net} = \sqrt{\left(y^{\#}_{net} u_{rel.\varepsilon} \right)^{2} + y^{\#}_{net} + \left(1 + \frac{1}{n} \right) \times \left(\frac{b(t_0) + 1}{n} \right)} \qquad = \sqrt{\left(y^{\#}_{net} u_{rel.\varepsilon} \right)^{2} + y^{\#}_{net} + \frac{y^{*2}_{[Net]}}{k^{2}_{1-\alpha}}}$$

En reprenant le raisonnement pour la détermination de la limite de détection et en considérant :
une loi de distribution des rendements gaussienne

$$y^{\#}_{net} = y^{*2}_{[Net]} + \boldsymbol{k_{1-\beta}}\sqrt{\left(y^{\#}_{net}u_{rel.\varepsilon}\right)^2 + y^{\#}_{net} + \frac{y^{*2}_{[Net]}}{k^2_{1-\alpha}}} \quad \Rightarrow \quad \left(y^{\#}_{net} - y^{*2}_{[Net]}\right)^2 = \boldsymbol{k^2_{1-\beta}}\left(y^{\#}_{net}u_{rel.\varepsilon}\right)^2 + y^{\#}_{net} + \frac{y^{*2}_{[Net]}}{k^2_{1-\alpha}}$$

La résolution de cette équation du second degré nous donne :

$$y^{\#}_{net} = \left(2y^{*}_{[Net]} + k^2_{1-\beta} + \sqrt{\left[2\times y^{*}_{[Net]} + k^2_{1-\beta}\right]^2 - 4\left(1-k^2_{1-\beta}u^2_{rel.\varepsilon}\right)\times\left[1-\frac{k^2_{1-\beta}}{k^2_{1-\alpha}}\right]\times y^{*}_{[Net]}}\right) \Big/ 2\left(1-k^2_{1-\beta}\,u^2_{rel.\varepsilon}\right)$$

En prenant des risques des risques α et β symétriques on peut écrire (le second terme sous la racine reste en général négligeable)

$$y^{\#}_{net} = \frac{k^2_{1-\alpha} + 2y^{*}}{1-k^2_{1-\beta}u^2_{rel.\varepsilon}}$$

Pour une mesure unique on peut assimiler $\boldsymbol{\sigma_R}$ à une incertitude $\boldsymbol{u_R}$ sur le rendement

A partir de cette valeur de $y^{\#}_{net}$ on peut alors calculer $y^{\#}_{Act.}$ comme $y^{\#}_{Act.} = y^{\#}_{net}/\varepsilon t_S$

F.3 Modélisation réaliste de l'incertitude sur le rendement

Une source d'activité vraie donnée $\tilde{\mathcal{A}}$ génère un comptage net réel $[Net]_S$ suivant la relation:

$$[Net]_S = [\varepsilon][\mathcal{A}\,dT] \quad \textbf{(XX1)}$$

Avec $[\varepsilon]$ la variable aléatoire «rendement » de moyenne vraie $\tilde{\varepsilon}$. Le caractère poissonien de la variable $[Net]_S$ et conjointement de la variable $[\mathcal{A}\,dT]$ impose à la variable rendement $[\varepsilon]$ d'être construite à partir de la relation (XX1) comme le rapport de deux variables de Poisson indépendantes :

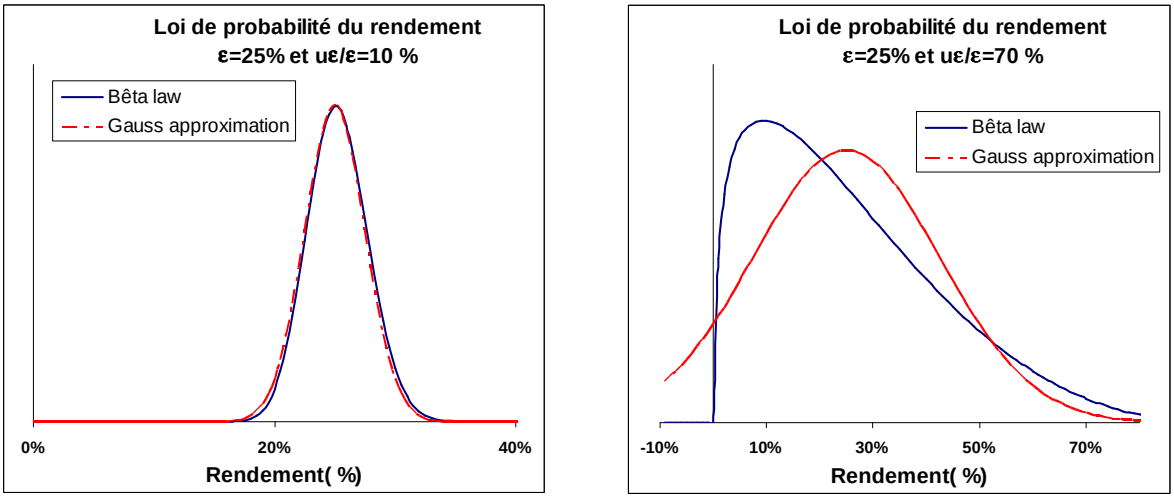
$$[\varepsilon] = [Net]_S/[\mathcal{A}\,dT] \quad \textbf{(XX2)}$$

L'écart-type de la variable $[\varepsilon]$, caractéristique d'une proportion aléatoire, est «égale à :

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\tilde{\varepsilon}(1-\tilde{\varepsilon})/\tilde{N}et} \quad \textbf{(XX3)}$$

La relation **(XX3)** donne la fluctuation naturelle du rendement réel correspondant à la composante aléatoire de l'incertitude u_ε sur le rendement estimé lors de l'étalonnage. Dans certains cas, d'autres composantes, liées à des incertitudes de type B *(incertitude sur l'activité de la source étalon, la nature élémentaire de la matrice etc*) sont susceptibles d'augmenter significativement l'incertitude sur le rendement, ce qui impacte le calcul de la limite de détection.

La variable rendement $[\varepsilon]$ peut être modélisée par une loi Bêta $B(\alpha,\beta)$ de paramètres $\alpha = \tilde{\varepsilon}\left(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}^2-u^2_\varepsilon\right)/u_\varepsilon$ et $\beta = (1-\tilde{\varepsilon})\left(\tilde{\varepsilon}-\tilde{\varepsilon}^2-u^2_\varepsilon\right)/u_\varepsilon$ (*Kirkpatrick et al., 2012*). Une telle loi, prenant ses valeurs entre 0 et 100 %, s'obtient par le rapport de deux variables de Poisson (*cf XX2*).



Graphe 6 : loi de probabilité du rendement (a) incertitude relative de 10 % - (b) incertitude relative de 60 %

Pour de faibles niveaux d'incertitudes relatives, la loi bêta du rendement peut être approximée par une loi de Gauss (*graphe 6a*). Cette approximation n'est plus possible à partir d'incertitudes relatives $u_\varepsilon / \tilde{\varepsilon}$ supérieures à 30 % : cette approximation présente alors 3 défauts majeurs (*graphe 6b*) :

- Elle ne respecte plus l'asymétrie de la loi bêta
- Elle présente des probabilités significatives pour des valeurs négatives du rendement
- Les surfaces des intervalles de risque de seconde espèce (*risque bêta*) calculées sur les parties basses des distributions sont significativement différentes

Ces différences impactent la valeur des fractiles correspondant à un risque bêta donné et modifie considérablement le calcul des limites de détection.

a) incertitude relative sur le rendement inférieure à 10 % :

Lorsque l'incertitude relative sur le rendement $u_\varepsilon / \varepsilon$ reste inférieure à 10 %, l'écart-type de la distribution H_1 s'écrit $\sigma_{H_1} \approx \sqrt{y^\# + 2(b+1)}$ et peut être approximée par la loi gaussienne discrétisée $\mathcal{N}\left(\mu_{H_1} = y^\#, \sigma_{H_1}\right)$. Pour un risque β égal au risque α, la limite de détection en termes d'activité s'obtient est égale à :

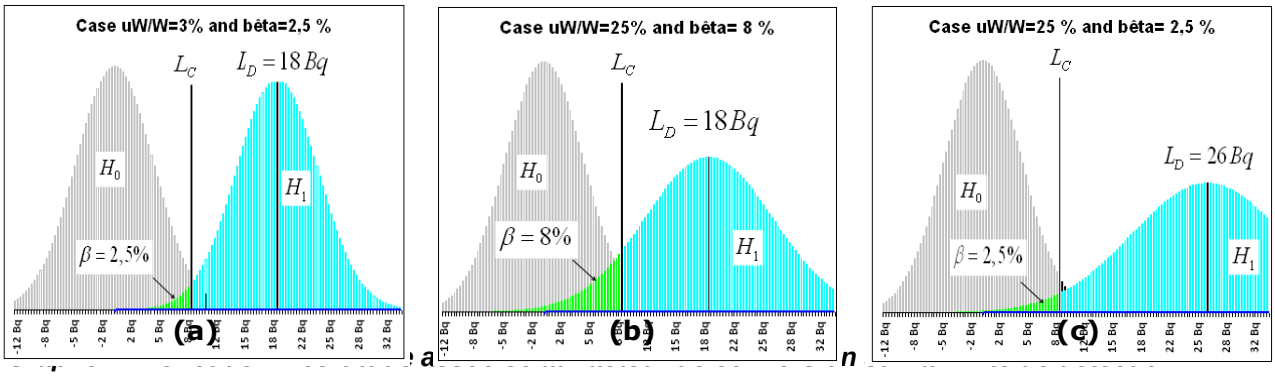
$$y^\# = \frac{k_{1-\beta}^2 + 2y^*}{\varepsilon T}$$

b) incertitude relative sur le rendement comprise entre 10 % et 30 % :

Dans ce domaine d'incertitude, l'approximation gaussienne de H_1 est encore recevable mais l'incertitude relative sur le rendement ne peut plus être négligé la relation (27) ne peut plus se simplifier. Pour une limite de détection inchangée, l'incertitude relative sur le rendement élargie la distribution de l'hypothèse H_1 (*graphe 11b*). On obtient alors un risque β plus élevé. Pour retrouver le risque β initial, il faut augmenter la limite de détection et par conséquent la valeur de σ_{H_1}. Pour obtenir un risque b^ta égal au risque alpha, on obtient alors

$$y_{net}^\# = \frac{k_{1-\alpha}^2 + 2y^*}{1 - k_{1-\beta}^2 u_{rel.\varepsilon}^2} \quad \text{(XX4)}$$

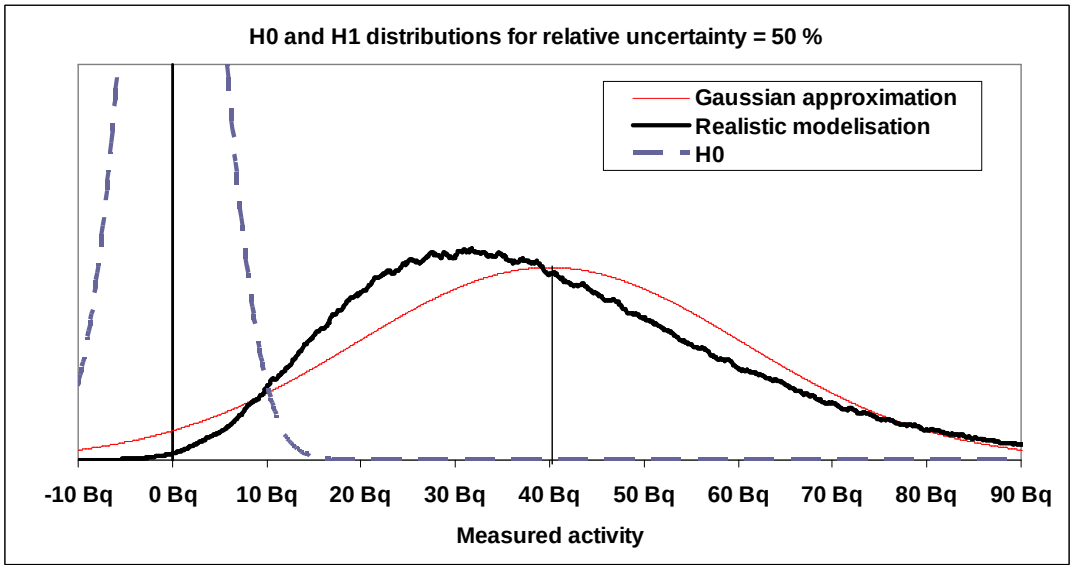
Conformément au chapitre précédent



c) incertitude relative sur le rendement supérieure à 30 %

Pour de telles incertitudes relatives sur le rendement, l'approximation gaussienne de la distribution, qui conditionne la valeur du fractile $k_{1-\beta}$ n'est plus recevable. Une telle approximation peut s'avérer désastreuse. En effet la relation XX4 montre que lorsque l'incertitude relative tend vers $1/k_{1-\beta}$, (*resp 51 % pour* $\beta = 2{,}5\%$ *et 61 % pour* $\beta = 5\%$), la limite de détection tend rapidement vers $+\infty$, et devient négative pour des valeurs supérieures.

Cet effet ne correspond à aucune réalité physique, et provient d'une mauvaise estimation du fractile $k_{1-\beta}$. L'abandon de l'approximation gaussienne et l'utilisation d'une modélisation plus réaliste du rendement par des lois bêta permet d'éviter cet effet.



Graphe 12 : Modélisation réaliste de la distribution H1 (40Bq) vs approximation gaussienne

Dans cet exemple, on obtient, pour une même limite de détection $A_{L_D} = 40Bq$

- Avec une modélisation réaliste : $\beta = 2{,}5\%$, correspondant à un fractile $k^*_{1-\beta} = 1{,}5$
- Avec l'approximation gaussienne : $\beta = 6{,}5\%$, correspondant à un fractile $k_{1-\beta} = 1{,}96$

Pour obtenir un risque $\beta = 2{,}5\%$ dans l'approximation gaussienne, la relation (XX4) donne une limite de détection $A_{L_D} = 4596\,Bq$, soit une valeur 100 fois trop élevée.

La solution consiste à utiliser dans la relation (XX4) un fractile effectif $k^{*}_{1-\beta}$ adapté à une modélisation réaliste :

L'utilisation de lois Bêta permettant une prise en compte plus réaliste des incertitudes élevées sur les facteur de conversion permet de proposer, à l'aide de simultation Monte-Carlo, une évolution des fractiles $k^{*_2}_{1-\beta}$ en fonction des incertitudes relatives sur le rendement.

Pour un risque β de 2,5 %

$u^2_{rel.\theta\varepsilon}$	$k^{*}_{1-\beta}$	$C_{or}(u_{rel.\theta\varepsilon})$
0%	1,96	1
10%	1,96	1,04
20%	1,96	1,18
30%	1,8	1,41
40%	1,6	1,7
50%	1,5	2,3
60%	1,37	3,1
70%	1,25	4,3
80%	1,16	7,2
90%	1,07	14
100%	0,98	25
110%	0,9	50
120%	0,83	125
200%	0,5	500

Pour un risque β de 5 %

$u^2_{rel.\varepsilon}$	$k^{*}_{1-\beta}$	$C_{or}(u_{rel.\varepsilon})$
0%	1,96	1
10%	1,64	1,03
20%	1,64	1,03
30%	1,5	1,12
40%	1,4	1,25
50%	1,32	1,5
60%	1,26	1,8
70%	1,18	2,3
80%	1,1	3,1
90%	1,03	4,4
100%	0,96	7
110%	0,89	12
120%	0,82	24
200%	0,5	31

Annexe G
Cumul de mesures multiples

G.1 Cas usuel de mesures multiples

Les situations expérimentales où il est possible de cumuler des mesures multiples sont diverses mais peuvent être répartis suivant trois schémas généraux possibles :

- **Schéma n°1** : Itération des mesures sur un même échantillon dans des conditions de mesures identiques, sauf éventuellement la durée de comptage.
- **Schéma n°2** : reproduction des mesures sur un même échantillon dans des conditions de mesures différentes : rendements, systèmes de mesures ect...
- **Schéma n°3** : mesures multiples d'échantillons différents mais obtenus à partir d'un mesurande unique qu'il convient de bien définir.

Dans tous les cas de figure l'objectif est de considérer des situations où le cumul des valeurs obtenues a un sens, que ce cumul corresponde à la somme des mesures individuelles, à leur moyenne algébriques ou pondérées, ou tout autre statistique issue de l'ensemble des résultats. Considérons à titre d'exemple la situation courante d'une mesure par spectrométrie gamma d'un échantillon susceptible de contenir un radionucléide multi-émetteur gamma. La prise en compte de toutes les régions d'intérêt (ROI) de ce radionucléide sur le spectre expérimental s'inscrit dans le schéma n°2. En effet chaque ROI peut être assimilée à un compteur nucléaire spécifique d'une énergie de photons émis par ce radionucléide. Chacun de ces « compteurs » peut être utilisé pour estimer l'activité de ce radionucléide, mais les photons mesurés, les intensités et les rendements sont différents d'une ROI à l'autre, répondant ainsi au critère de reproductibilité. On obtient ainsi un nombre déterminé n d'estimations $\hat{A}_n$ d'une même activité vraie $\tilde{A}$ dans des conditions de reproductibilité, ces estimations ainsi mesurées ayant vocation à être du même ordre de grandeur, mais pas leurs incertitudes ni leurs seuils de décisions propres.

On peut montrer que dans une telle situation la meilleure estimation de la valeur vraie consiste à prendre la moyenne des n activités mesurées pondérées par l'inverse du carré de l'incertitude. Cette démarche correspond bien à la prise en compte de toutes les informations accessibles dans le spectre pour ce radionucléide, démarche appelée ici de façon générique « cumul », et non pas à la prise en compte seulement de la meilleure estimation individuelle parmi les n obtenues. La meilleure estimation individuelle correspond en général à l'estimation ayant la plus petite incertitude, où de façon quasi-équivalente au pic « le plus rempli ». On peut alors montrer que l'estimation par cumul, ici la moyenne pondérée, est toujours meilleure que la meilleure des estimations individuelles. Ce résultat se comprend intuitivement dans la mesure où chaque mesure que l'on intègre au cumul apporte une quantité d'information supplémentaire, au prorata inverse de son incertitude, ce qui ne peut qu'améliorer peu ou prou l'information finale. C'est bien évidemment tout l'intérêt de cumuler l'ensemble des informations disponibles lorsque cela est possible.

En spectrométrie gamma l'usage de la moyenne pondérée sur l'ensemble des pics d'un même radionucléide ne pose aucun problème pour autant que ces pics soient « suffisamment remplis ». Moins prosaïquement le calcul de la moyenne pondérée ne pose aucun problème aux utilisateurs lorsque toutes les estimations sont supérieures à leurs seuils de décisions respectifs, signifiant par là que chaque mesure est jugée significative d'une présence avérée du radionucléide dans l'échantillon. Les problèmes apparaissent lorsque toutes ou partie des n mesures sont inférieures à leurs seuils de décisions respectifs. En effet lorsque une mesure est inférieure au seuil de décision, on décide que l'effet n'est pas détecté et l'on déclare $"< y^{\#}"$

Ainsi lorsque k mesures sur n sont dans ce cas là, plusieurs questions apparaissent :

- Faut-il intégrer ces k mesures non significatives au cumul ?
- Si « oui » sous quelle forme prendre en compte l'information $"< y^{\#}"$?
- Si « non » ne néglige t'on pas des informations au risque de biaiser le résultat final ?
- Toujours dans ce cas là que faut-il faire si toutes les mesures sont inférieures à leurs seuils de décision respectifs ?
- Dans tous les cas de figure quel est le seuil de décision et la limite de détection correspondant à la moyenne pondérée finale ?
- Peut-on d'une façon ou d'une autre utiliser les n seuils de décisions individuels pour déterminer le seuil de décision sur le cumul ?

L'un des éléments de réponse les plus importants que l'on justifiera ultérieurement est qu'en réalité il ne faut surtout pas se préoccuper de savoir si les mesures individuelles sont inférieures ou non à leur seuil de décision respectifs pour établir le cumul. A l'inverse s'en préoccuper avant d'effectuer le cumul est non seulement inutile mais pose des difficultés insurmontables, et certaines des questions que nous venons d'évoquer, pour légitime qu'elles puissent apparaitre, ne doivent pas être posées.

G.2 Détermination du seuil de décision cumulé dans le cas de répétition de comptage

Détermination du seuil de décision cumulé dans le cas de répétition de comptage

- ***Description du processus de répétabilité et analyse des résultats individuels***

En partant d'une situation simple, correspondant au schéma n°1, celui de l'itération, il est possible d'établir sans difficultés les règles principales que l'on retrouvera dans tous les cas de figure. De plus cette situation simple de cumul est déjà implicitement à l'œuvre lorsque l'on effectue une mesure unique d'activité à partir d'un comptage unique de bruit de fond et d'un comptage brut unique de l'échantillon. Ainsi une mesure unique de dix secondes correspond naturellement à rebours au cumul de dix mesures d'une seconde dans des conditions de répétabilité. On considère une série de 10 mesures d'un même échantillon dans des conditions de répétabilité : même détecteur, même distance source-détecteur, même condition de bruit de fond, même durée de comptage.

Pour chaque mesure individuelle « i » on peut distinguer plusieurs phases dans l'opération de mesure et de son analyse :

➢ **Phase 1 : construction de l'outil d'aide à la décision :**

- Comptage de bruit de fond pour une durée t_0 identique à la durée de comptage échantillon notée t_S : le résultat obtenu est noté b_i
- Détermination du seuil de décision en termes de comptage net suivant la formule $y_i^* = k_{1-\alpha}\sqrt{2(b_i+1)}$ (1)
- Détermination de la limite de détection en termes de comptage net suivant la formule $y_i^{\#} = k_{1-\beta}^2 + 2y_i^*$ (2), correspondant au cas de risques alpha et bêta identiques.

➢ **Phase 2 : la mesure échantillon :**

- Comptage brut échantillon : le résultat obtenu est noté g_i
- Détermination du comptage net par correction de bruit de fond $net_i = g_i - b_i$

➢ **Phase 3 : l'analyse du résultat :**

- Test seuil de décision $net_i > y_i^*$?
- Si « oui » l'effet est considéré détecté. Estimation du comptage moyen vrai et incertitude

associée $\hat{\mu}_{Net} = net_i \pm k\sqrt{net_i + 2b_i}$

- Si « non» l'effet est considéré comme non détecté. Expression finale du résultat : $"< y^{\#}"$ $\Leftrightarrow$ $0 < \mu_{Net} < y^{\#}$

Exemple numérique :

	Phase 1			***Phase 2***		***Phase3***			
	b_i	y_i^*	$y_i^{\#}$	g_i	net_i	$net_i > y_i^*$?	*Résultat*	*Incertitude élargie (k=2)*	*incertitude relative*
mes. 1	100	28	59	143	43	oui	43	31	73%
mes. 2	96	27	58	148	52	oui	52	31	60%
mes. 3	113	29	63	130	17	***non***	$< y_i^{\#}$	/	/
mes. 4	117	30	64	158	41	oui	41	33	81%
mes. 5	142	33	70	134	-8	***non***	$< y_i^{\#}$	/	/
mes. 6	110	29	62	154	44	oui	44	32	74%
mes. 7	126	31	66	142	16	***non***	$< y_i^{\#}$	/	/
mes. 8	138	33	69	138	0	***non***	$< y_i^{\#}$	/	/
mes. 9	103	28	60	152	49	oui	49	32	65%
mes. 10	104	28	60	123	19	***non***	$< y_i^{\#}$	/	/

Tableau 1 : analyses individuelles de 10 comptages d'un même échantillon

Cumul des résultats par sommation des comptages individuels

L'objectif du cumul est de synthétiser l'ensemble de ces informations en une seule ligne. A nouveau apparait le problème d'intégrer à ce cumul des informations du type $< y_i^{\#}$. Or dans ce cas précis le point de départ de cette synthèse est triviale. En effet, et pour des raisons purement physiques, les deux séries de comptages brutes et de bruit de fond peuvent être perçus comme des résultats intermédiaires partiels de deux comptages uniques : un comptage unique de bruit de fond durant $10\,t_S$ et un comptage brut unique de même durée. Ce simple constat va permettre de réaliser le cumul sans se préoccuper de savoir si chaque résultat est supérieur ou inférieur à son seuil de décision. Ainsi apparait une règle fondamentale dans ce type de problème :

- **Règle n°1** : les informations de la phase d'analyse des mesures individuelles ne doivent pas être prises en compte dans l'élaboration du cumul et il faut à l'inverse conserver sans états d'âmes, dans l'objectif de réaliser un cumul toutes les informations des phases 1 et 2 de toutes les mesures individuelles, quelles qu'elles soient, y compris lorsque les valeurs nettes sont négatives:

	Phase 1			Phase 2	
	b_i	y_i^*	$y_i^\#$	g_i	net_i
mes. 1	100	28	59	143	43
mes. 10	104	28	60	123	19

Tableau 2 : informations à conserver avant le cumul

L'opération de cumul consiste dans ce cas particulier à considérer une mesure unique de bruit de fond suivant $b_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} b_i$ (3) et une mesure unique brute échantillon suivant $g_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Dans la mesure où la somme conserve le caractère poissonien des valeurs de comptages, ces deux valeurs de comptages permettent d'appliquer le même mode opératoire que précédemment :

- **Phase 1** : la construction de l'outil d'aide à la décision sur le résultat cumulé :
  - Comptage de bruit de fond égal à b_Σ .
  - Détermination du seuil de décision « cumul »: $y_{\Sigma Net}^* = k_{1-\alpha}\sqrt{2b_\Sigma}$ (4)
  - Détermination de la limite de détection « cumul » $y_{\Sigma Net}^\# = k_{1-\beta}^2 + 2y_{\Sigma Net}^*$ (5),

- **Phase 2** : la mesure échantillon cumulée:
  - Comptage brut échantillon : le résultat obtenu est noté g_Σ
  - Détermination du comptage net $net_\Sigma = g_\Sigma - b_\Sigma$

- **Phase 3** : l'analyse du résultat cumulée:
  - Test seuil de décision $net_\Sigma > y_{\Sigma Net}^*$?
  - Si « oui » l'effet est considéré détecté. Estimation du comptage moyen vrai et incertitude associée $\hat{\mu}_{Net_\Sigma} = net_\Sigma \pm k\sqrt{net_\Sigma + 2b_\Sigma}$
  - Si « non» l'effet est considéré comme non détecté. Expression finale du résultat : $"< y_{\Sigma Net}^\# "$ $\Leftrightarrow$ $0 < \mu_{\Sigma Net} < y_{\Sigma Net}^\#$

On notera que le mesurande d'intérêt net_Σ est aussi égal à $net_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} net_i$.

Appliquée à l'exemple précédent on obtient le résultat cumulé suivant :

	Phase 1			Phase 2		Phase3			
	BdF_Σ	$y_{\Sigma Net}^*$	$y_{\Sigma Net}^\#$	g_Σ	net_Σ	$net_\Sigma > y_\Sigma^*$?	*Résultat*	*Incertitude élargie (k=2)*	*incertitude relative*
Cumul par somme	1149	94	192	1422	273	oui	273	101	37%

Tableau 3 : cumul par sommation

Le résultat évident montrant l'intérêt général du cumul est ici l'incertitude relative finale égale à 37 %, alors que pour l'ensemble des résultats individuels, la moyenne des incertitudes relatives calculées sans tenir compte des seuils de décision est de l'ordre de 150 %. Une seconde indication moins évidente mais tout aussi significative de cet intérêt est de constater que le résultat final en termes de comptage net (273) est maintenant largement supérieur non pas seulement au seuil de décision mais aussi à la limite de détection (192). Cela confirme que la radioactivité est confirmée avec une très

grande probabilité[1], alors que cinq mesures individuelles (partielles) sur les dix ne confirmaient pas cette présence. En conclure que la probabilité que l'échantillon soit non radioactif ait pu être égale à 0,5 eut été fort pessimiste (ou fort optimiste si l'on eût préféré qu'il ne le soit pas).

Détermination du seuil de décision sur le cumul à partir des seuils de décision individuels

La méthode de cumul utilisé ici n'a pas nécessité de connaitre au préalable les seuils de décision et limites de détection individuels (ou « partiels »), ce qui semble contredire la règle n°1 qui préconise de les garder. De fait nous allons montrer maintenant que ces valeurs peuvent être employées pour retrouver directement le seuil de décision propre à la valeur de cumul.
Si l'on considère les relations 1,2 et 4 on peut écrire :

$$\begin{cases} (1)\ \ y^*_{\Sigma Net} = k_{1-\alpha}\sqrt{2BdF_\Sigma} \\ (2)\ \ b_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} BdF_i \\ (3)\ \ y^*_{Net\,i} = k_{1-\alpha}\sqrt{2BdF_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^*_{\Sigma Net} = k_{1-\alpha}\sqrt{2\sum_{i=1}^{n} BdF_i} \\ b_i = \dfrac{y^{*2}_{Net\,i}}{2k^2_{1-\alpha}} \end{cases} \Rightarrow y^*_{\Sigma Net} = k_{1-\alpha}\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}\frac{y^{*2}_{Net\,i}}{2k^2_{1-\alpha}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{*2}_{Net\,i}}$$

On obtient ainsi une relation simple entre le seuil de décision sur le cumul et les seuils de décisions partiels : $y^*_{\Sigma Net} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{*2}_{Net\,i}}$. Il est important de noter que cette relation est analogue à la relation entre l'incertitude sur le résultat cumulé et les résultats partiels. En effet soit u_Σ l'incertitude associé à net_Σ et u_i les incertitudes associés aux résultats partiels net_i , on sait que la relation $net_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} net_i$ permet d'exprimer l'incertitude associée suivant la relation $u_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$. Cette analogie ne vaut pas démonstration, mais devient plus pertinente si l'on se rappelle que fondamentalement $y^* = k_{1-\alpha}\sigma_{H0}$ Etant homogène à un écart-type, les seuils de décisions se propagent dans le modèle du résultat cumulé suivant la même algèbre que les incertitudes. Ce constat permet d'énoncer la règle suivante :

❖	**Règle n°2** : les seuils de décisions suivent une algèbre d'écart-type et se composent dans des opérations de cumuls suivant la même formule que les incertitudes.

[1] *Un calcul précis montre qu'avec de telles valeurs la probabilité résiduelle que l''échantillon soit non radioactif est égale à*

Contexte expérimental	Mesurande d'intérêt	Seuil de décision associé	Limite de détection associée
comptage unique	$net = g(t_s) - \frac{b(t_0)}{n}$	$y^*_{Net} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{b(t_0)+1}{n}}$	$y^\#_{net} = k^2_{1-\beta} + 2y^*_{Net}$
Mesure d'activité unique	$\mathcal{A} = \frac{net}{\varepsilon_i.\gamma_i.t}$	$y^*_{\mathcal{A}i} = \frac{y^*_{net\,i}}{\varepsilon_i.\gamma_i.t}$	$y^\#_{\mathcal{A}i} = \frac{k^2_{1-\beta} + 2y^*_{net}}{\varepsilon_i.\gamma_i.t}$
Cumul par sommation des valeurs de comptage	$net_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} net_i$	$SD_{\Sigma Net} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{*2}_{net\,i}}$	$y^\#_{\Sigma Net} \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{\#2}_{net\,i}}$
Cumul par moyenne des valeurs de comptage	$\overline{net}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} net_i}{n}$	$y^*_{\overline{net}_n} = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{*2}_{net\,i}}$	$y^\#_{\overline{net}} \approx \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} LD^2_{Net}}$
Cumul par sommation des activités mesurées	$\hat{\mathcal{A}}_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathcal{A}}_{i.}$	$y^*\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\mathcal{A}}_{i.}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{*2}_{\mathcal{A}i}}$	$y^\#\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{\mathcal{A}}_{i.}\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y^{\#2}_{\mathcal{A}i}}$
Cumul par moyenne pondérée des activités mesurées (schéma n°2)	$\hat{\mathcal{A}}_{pond.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^2}\mathcal{A}_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^2}}$	$y^*\left(\hat{\mathcal{A}}_{pond.}\right) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y^{*2}_{\mathcal{A}i}}}}$	$y^\#\left(\hat{\mathcal{A}}_{pond.}\right) \approx \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{LD^2_{\mathcal{A}i}}}}$
Cumul par moyenne pondérée des activités mesurées (schéma n°3)	$\hat{\mathcal{A}}_{pond.} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^2}\mathcal{A}_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i^2}}$	$y^*\left(\hat{\mathcal{A}}_{pond.}\right) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y^{*2}_{\mathcal{A}i}}}}$	$y^\#\left(\hat{\mathcal{A}}_{pond.}\right) \approx C.\sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y^{\#2}_{\mathcal{A}i}}}}$ $C = \frac{1}{1 - k^{*2}_{1-\beta}.\sigma^2_{rel.\varepsilon}}$

Annexe H

PORTIQUE DE DÉTECTION

H.1 Hypothesis and experimentals conditions

Remark : we use the notation $[X]$ to describe a random variable and X for a realisation of this variable and $\overline{X}$ *or* $\overline{[X]}$ *for* $E(X)$

.

The principal aim is to determine a decision threshold with an a priori α risk for a truck going past a detector.

We assume for simplification that the only experimental value to be used is the background counting value jut before the truck is coming. This value will be noted N_1. For simplification one more we take the same time duration for background and truck measurement. We consider that this single value is a realisation of a Poisson variable noted $[N]$, characterized by a true but unknown value $\overline{N}$

We suppose that, in a first experimental phase, we have determined that for non-radioactive trucks the background counting mean value decrease with a shielding factor noted "**a".**

This value is constant for a same truck in the same conditions of measurement (distance, speed, truck dimensions etc°) but this value could change if the experimental conditions change.

We assume here that the shielding factor **a** can be described by a random variable $[a]$ with uniform probability (or anything else if necessary) law in the interval $[a_{\min}, a_{\max}]$. This distribution is characterised by a mean value $\overline{a}$ and standard deviation σ_a with the relation $\sigma_a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{2\sqrt{3}}$.

It is important to note here that σ_a doesn't represent first uncertainty, but variability.

Determination of decision H_0 distribution

H.2 Determination of decision H_0 distribution

To determine our decision threshold we will work in the framework of hypothesis statistical test, essential condition as we want to determine an α risk.

In these condition we must build the H_0 distribution with two constraints :

1. The H_0 must naturally be centred on zero (non-radioactive truck)

2. The only experimental values would be : N_1, $\overline{a}$ and σ_a.

The H_0 distribution is determined as below :

When the non-radioactive truck is present we consider that the counting variable is a Poisson variable $[aN]$, corresponding to a true but unknown value $a\overline{N}$. As we must consider all possible values for the **a** shielding factor we must then here consider, for H_0 construction, **a** as the random variable $[a]$ described before, so we will use the particular Poisson random variable $[a \times N]$. In the simulation we use a poissonian randomization with a parameter $a \times N_1$, but before this randomization we must randomize the value of a, and so the value of the true mean value $a \times N_1$.

To obtain a net counting value, we have then to substract an estimation of the background counting value for an hypothetic truck is present. In real condition this estimation is the quantity $\overline{a} \times N_1$. So for the H_0 construction we must use the random variable $\overline{a}[N]$, build as a simple product of the poissonian variable $[N]$ of the true mean value equal to N_1

Then the H_0 distribution, <u>as a probability law of the possible net counting value N_{net} when a truck is not radioactive,</u> is :

$$[N_{net}]_{H_0} = [a \times N] - \overline{a}[N]$$

By construction we effectively obtain
$\overline{N_{net}} = \overline{[a \times N] - \overline{a}[N]} = \overline{[a \times N]} - \overline{\overline{a}[N]} = \overline{a}\overline{N} - \overline{a}\overline{N} = 0$ (*in accordance with constraint 1*), so we can see here the main advantage of the test hypothesis framework : the uncertainty of our mean distribution is null.

Of course uncertainty considerations appears when we want to calculate the standard deviation of the H_0 distribution. In this case we have to consider bayesian (or epistemic) uncertainty for $\overline{N}$ estimated by N_1. We have demonstrated in our article that the variance associated to a Poisson variable $[N]$estimated from single measurement N_1 is equal to $V(N) = 2 \times (N_1 + 1)$. We must remember that this variance is the consequence of two effect :

- First the variance $(N_1 + 1)$ of the poissonian process,
- Second the variance coming from uncertainty on the true value, of same amplitude $(N_1 + 1)$.

So the covariance term between two random variables $[N]$ is null for the poissonian term (independant), but no null in respect of the fact that the two variables have the same but uncertain true mean value, so $Cov([N],[N]) = \frac{1}{2}V[N] = (N_1 + 1)$ *(that is to say that.the random variables are correlated through their true mean values).*

In this problem the counting values are generally high we write $V[N] \approx 2 \times N_1$ and $Cov([N],[N]) \approx N_1$ In the same way the bayesian estimator of the true mean value is $\overline{N} = (N_1 + 1) \approx N_1$

H.3 Variance and decision threshold calculation

$$V\left(\left[N_{net}\right]_{H_0}\right)=\sigma^2_{[a\times N]}+\sigma^2_{\bar{a}\times[N]}-2Cov\left(\left[a\times N\right],\bar{a}\times\left[N\right]\right)\ :$$

- $\sigma^2_{[a\times N]}=\bar{N}^2\sigma_a^2+\bar{a}^2\sigma_N^2+\sigma_a^2\sigma_N^2=N_1^2\sigma_a^2+2\bar{a}^2N_1+2\sigma_a^2N_1$
- $\sigma^2_{\bar{a}\times[N]}=\bar{a}^2\sigma_N^2=2\bar{a}^2N_1$
- $Cov\left(\left[a\times N\right],\bar{a}\left[N\right]\right)=\bar{a}^2Cov\left(\left[N\right],\left[N\right]\right)=\bar{a}^2N_1$

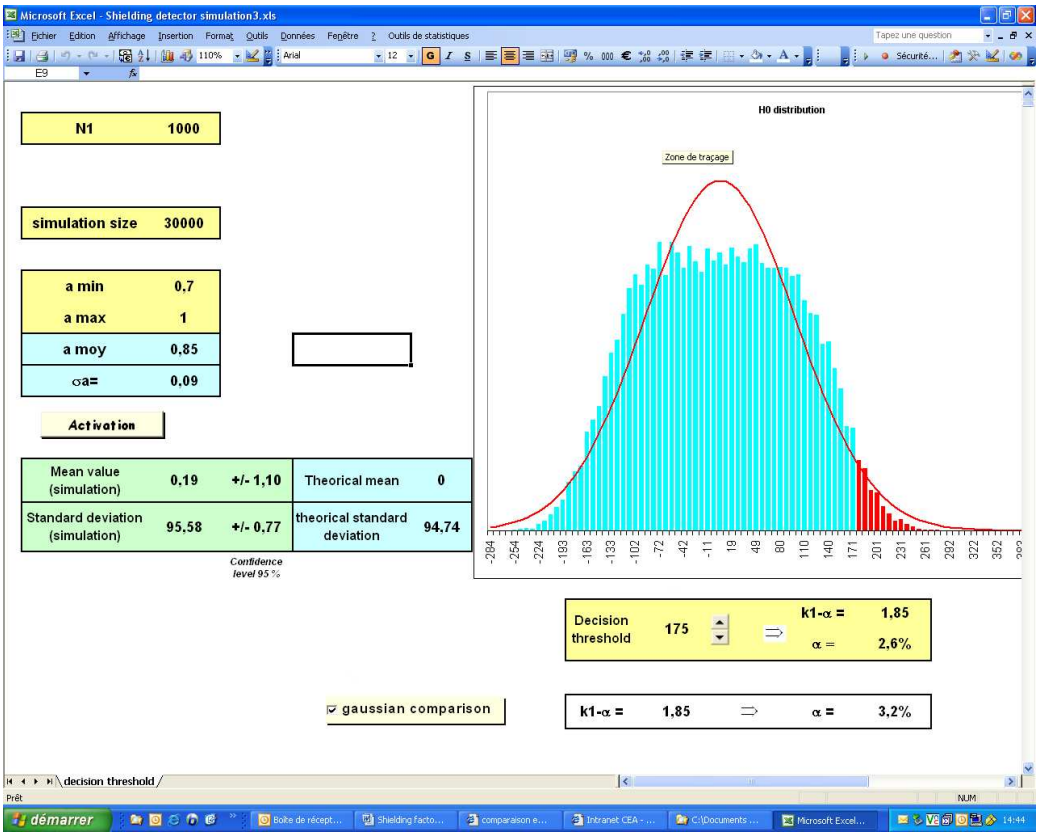
We finally obtain $\sigma^2_{[N_{net}]_{H_0}}=N_1^2\sigma_a^2+2\bar{a}^2N_1+2\sigma_a^2N_1$ (*in accordance with constraint 2*)

For a given α risk the decision threshold would be equal to $N^*_{net}=k'_{1-\alpha}.\sigma^2_{[N_{net}]_{H_0}}$, the value of $k'_{1-\alpha}$ strongly depending of the H_0 nature. For a gaussian or approximative gaussian distribution we would have as usual $k'_{1-\alpha}\approx 2\ \ for\ \alpha=2{,}5\%\ etc$.

As we take a uniform distribution for $\left[a\right]$ nothing is then certain.

Here can take place numerical simulation :

We see on this simulation that even the distribution is not gaussian the difference between the α risk is not too large (3,2 % in gaussian approximation instead of 2,6 %)

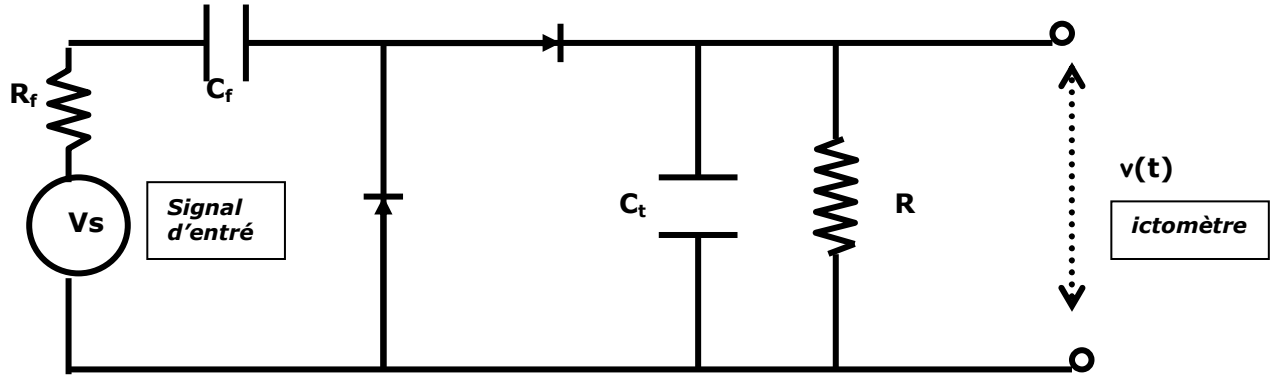


Annexe I

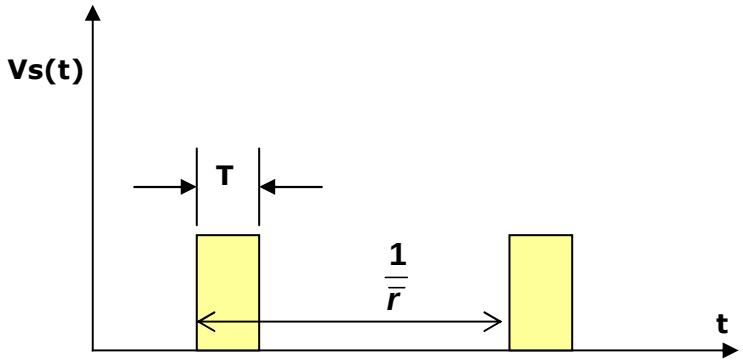
Ictomètres ou radiamètres analogiques et numériques

I.1 Principe de fonctionnement des ictomètres analogiques

Le fonctionnement des ictomètres analogiques repose sur le schéma de principe suivant (cf KNOLL §17):

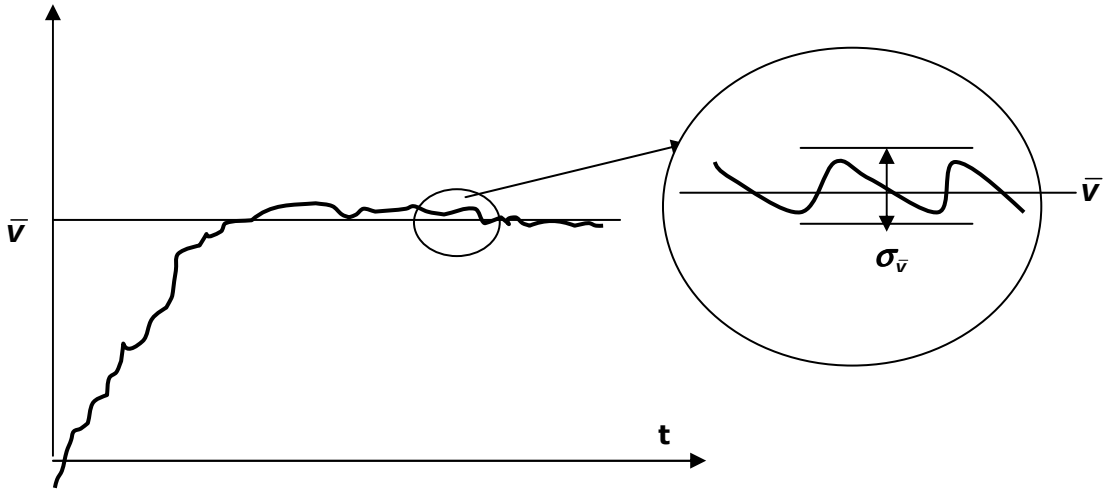


Le signal d'entrée Vs est un train d'impulsion correspondant aux signaux de détections (temps d'arrivé aléatoires) avec un taux moyen égal à $\bar{r}$:



Les valeurs des éléments respectent les conditions suivantes : $C_f << C_t$; $T >> R_f C_f$; $\frac{1}{r} - T >> R_f C_f$

Ces impulsions vont générer des charges élémentaires Q dans une capacité C_f. La décharge de cette dernière dans la capacité C_t et au travers de la résistance R va générer une tension de sortie moyenne (lecture ictomètre) ayant l'allure suivante :



La constante de temps de l'ictomètre est égale à $\tau = R C_t$ (souvent réglable au travers de C_t).
La charge lente et la décharge rapide de C_t s'équilibrent au bout d'un certain temps (quelques multiple de τ) autour d'une valeur moyenne : $\bar{v} = R i = R Q \bar{r}$

L'ictomètre génère donc, en continu, une tension proportionnelle au taux d'impulsions.Cette tension moyenne va cependant fluctuer (le « tremblement » de l'aiguille) et l'on peut montrer que l'écart-type relatif de cette fluctuation vaut :

$$\frac{\sigma_{\bar{v}}}{\bar{v}} = Q \times \sqrt{\frac{1}{2 R C_f \bar{r}}}$$

$$\text{or} \quad \frac{\sigma_v}{v} = \frac{\sigma_r}{r} = \sqrt{\frac{1}{2\ R\ C_f\ r}} \Rightarrow \sigma_r = \sqrt{\frac{\bar{r}}{2\tau}}$$

I.2 Détermination d'un seuil de décision pour un ictomètre analogique

La relation précédente est analogue à la mesure d'un taux de comptage par intégration sur un temps $t = 2\tau$ pour lequel $u_r = \sqrt{\frac{\bar{r}}{t}}$.

le seuil de décision en terme de taux de comptage net était égal à : $y^*(r_{net}) = k_{1-\alpha} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{r_b}{t_s}}$

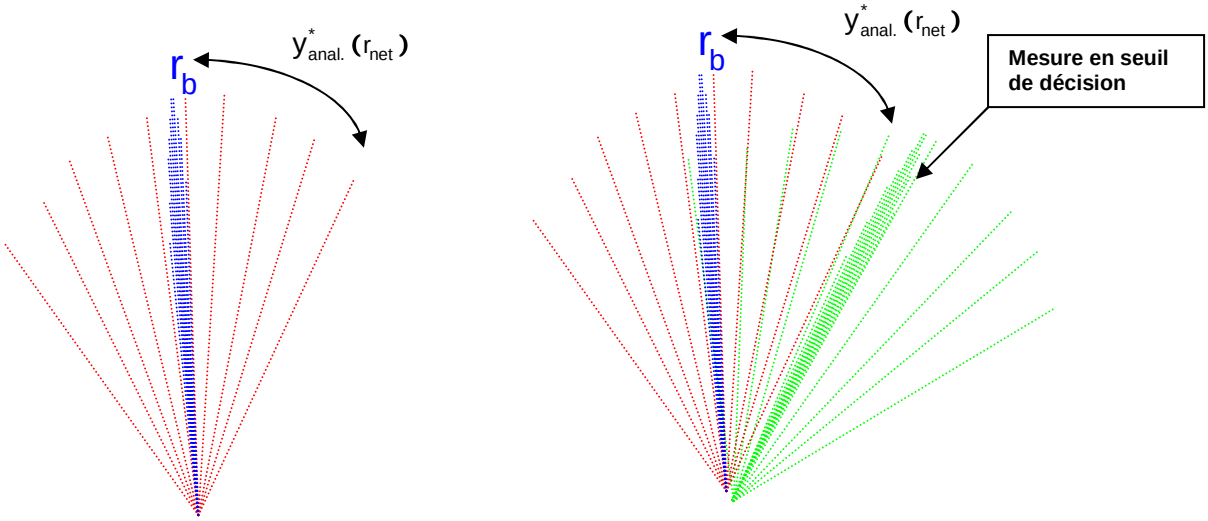
Le facteur n est égal au rapport entre le temps total alloué à la mesure du bruit de fond et le temps d'intégration. On rencontre alors par analogie dans la littérature l'expression du seuil de décision en termes de taux de comptage net pour un ictomètre analogique :

Pour n =1 $\quad y^*_{anal.}(r_{net}) = k_{1-\alpha} \times \sqrt{\frac{r_b}{\tau}}$

Pour n grand $\quad y^*_{anal.}(r_{net}) = k_{1-\alpha} \sqrt{\frac{r_b}{2\tau}}$

Cette approche laisse avec un ictomètre analogique en suspend un problème : le principe de mesure ne permet pas une mesure directe des taux de comptages net, même si l'on peut en principe décaler la position moyenne de l'aiguille. Cette opération ne permet pas de prendre en compte les fluctuations du bruit de fond sur lesquelles repose toute la construction du critère du seuil de décision.

Il est donc nécessaire de traduire les expressions précédentes en fonction de la réalité d'un ictomètre analogique. Le seuil de décision correspond au débattement maximum de l'aiguille par rapport à la position moyenne sur une mesure du bruit de fond



Une mesure supérieure au seuil de décision correspond à une mesure dont la position moyenne de l'aiguille se trouve sur la position maximale de la mesure en bruit de fond. Bien entendu la difficulté de l'exercice repose sur une moyenisation et une mémorisation des positions par l'opérateur.

I.3 Seuil de décision avec un ictomètre numérique

Les formules précédentes sont équivalentes à la détermination d'un seuil de décision à partir d'un seul comptage durant un temps d'intégration égal à 2τ. Or si l'on effectue une mesure durant un temps $t_s = 2k\tau$, ce qui correspond à la pratique usuelle avec un ictomètre (sachant que τ est en général assez petit) le seuil de décision devrait être beaucoup plus bas, divisé en principe par $\sqrt{k}$. Cette approche théorique est impossible avec un ictomètre analogique, mais reste possible avec un ictomètre numérique capable de mémoriser toutes les informations.

Ainsi un ictomètre numérique peut calculer un seuil de décision en fonction non plus du temps d'intégration τ mais du temps t_0 d'observation du bruit de fond et du temps t_s d'observation de l'échantillon :

$$y^*_{num}(r_{net}) = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\overline{r_b}}{t_s}}$$

Pour $t_s = t_0 = 2k\tau$ on obtient :

$$y^*_{num}(r_{net}) = k_{1-\alpha}\sqrt{2\frac{\overline{r_b}}{t_s}} = k_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\overline{r_b}}{k\tau}} = k_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\overline{r_b}}{\tau}}\Big/\sqrt{k} = y^*_{anal.}(r_{net})\Big/\sqrt{k}$$

Ce seuil de décision opère sur un taux de comptage net moyen obtenu par la moyenne des k taux de comptages nets évalués pendant la mesure échantillon

Dans la mesure où un ictomètre délivre une information en termes de taux de comptages bruts, le seuil de décision opérationnel est alors égal à

$$y^*_{num}(r_{brut}) = \overline{r_b} + k_{1-\alpha}\sqrt{2\frac{\overline{r_b}}{t_s}} = \overline{r_b} + k_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\overline{r_b}}{\tau}}\Big/\sqrt{k} = \overline{r_b} + y^*_{anal.}(r_{net})\Big/\sqrt{k}$$

Annexe J

CALCUL SD SUR UN SIGNAL « COURANT »

J.1 La détermination expérimentale du seuil de décision

.

Le principe du seuil de décision est le même. L'objectif principal étant de décider à partir de quelle valeur de signal on peut rejeter l'hypothèse « que l'on ne mesure rien » (*hypothèse* H_0*)* avec une faible probabilité *a priori* que l'hypothèse H_0 soit vraie (risque alpha , i.e. risque de fausse alarme fausse alarme)

Je vais revenir sur les comptages pour bien montrer l'analogie avec le seuil sur un courant

Il faut commencer par connaitre le signal obtenu dans l'hypothèse H_0. Avec les comptages nucléaires on peut utiliser un seul comptage de bruit de fond, et l'hypothèse poissonienne permet d'en déduire la distribution de H_0 correspondant à la distribution des valeurs de mesures nettes « sans radioactivité ».

Avec une mesure unique de bruit de fond $BdF\left(T_0\right)$ (comptage brut, donc poissonien) obtenue pendant T_0 la valeur du seuil de décision en terme de comptage net pour un échantillon devant être mesuré pendant le temps T_s est égal à

$$SD_{Net} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\frac{BdF(T_0)}{n}} = k_{1-\alpha}\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\overline{BdF}(T_s)} \text{ avec } n=\frac{T_0}{T_s} \text{ et } \overline{BdF}(T_s)=\frac{BdF(T_0)}{n}$$

le comptage moyen de bruit de fond ramené au temps T_s

Ce qui est important de souligner ici est que $\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\overline{BdF}(T_s)} = \sigma_{H_0}$ représente l'écart-type σ_{H_0} des mesures nettes dans l'hypothèse H_0 , cad la fluctuation réelle que l'on peut éventuellement mesurer par répétabilité du signal net de bruit de fond. A noter que la norme ISO 11929 « ne permet pas » une telle approche empirique, et c'est là un de ses principaux défauts.

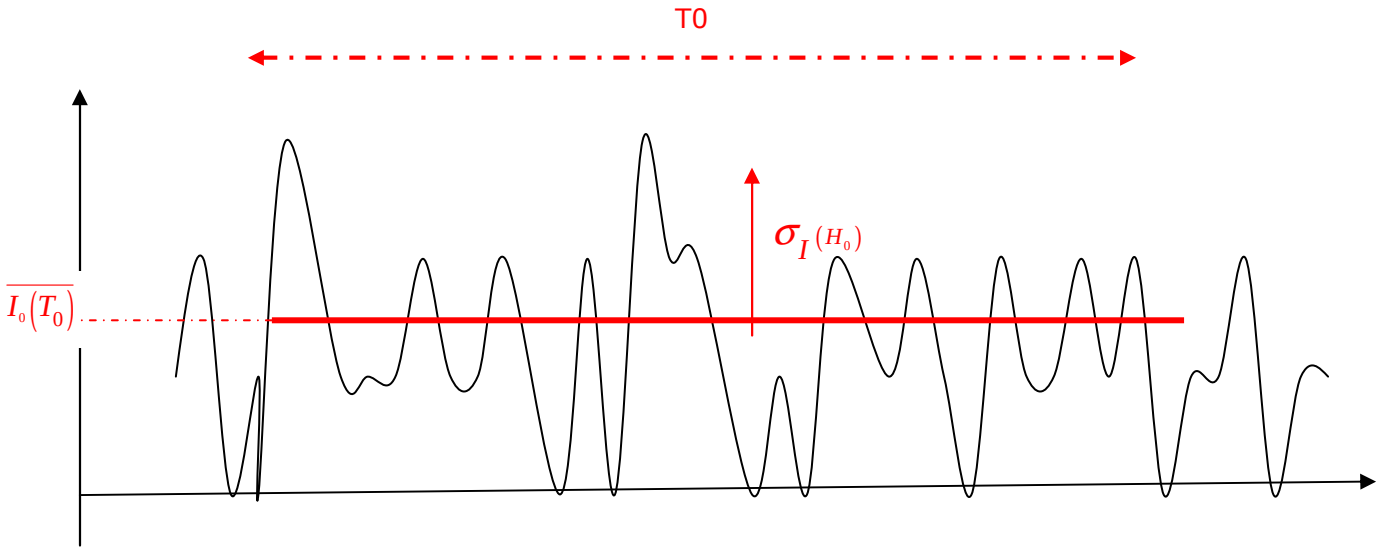
Lorsque l'on mesure un échantillon pendant T_s et que l'on obtient $Brut(T_s)$, on calcule le comptage net $Net(T_s) = Brut(T_s) - \overline{BdF}(T_s)$ que l'on vient comparer au seuil net $SD_{Net} = k_{1-\alpha}\times\sigma_{H_0}$.

A noter que l'on peut tout aussi bien utiliser les valeurs brutes et définir un seuil de décision brut qui sera ici $SD_{Brut} = \overline{BdF}(T_s) + k_{1-\alpha}\times\sigma_{H_0}$. Ceci sera utile pour lle signal courant

A noter aussi que si $n = \frac{T_0}{T_s}$ est grand alors $SD_{Brut} = \overline{BdF}(T_s) + k_{1-\alpha}\sqrt{\overline{BdF}(T_s)}$ au lieu de

$SD_{Brut} = \overline{BdF}(T_s) + k_{1-\alpha}\sqrt{2 \times \overline{BdF}(T_s)}$ pour $n = 1$

TRANSPOSITION DE CETTE METHODE POUR UNE MESURE COURANT.



On considère un signal « courant » dans l'hypothèse H_0 pendant un temps T_0 . On obtient alors les caractéristique suivantes

- *Signal moyen sur* T_0 : $\overline{I_0(H_0, T_0)}$ (noté $\overline{I_0}$ pour simplifier)
- *Fluctuation instantanée caractérisé par l'écart-type* $\sigma_I(H_0)$ *(noté* σ_I pour simplifier)

Il faut maintenant introduire le facteur temps dans ce problème.

Au premier niveau le courant instantanée $I(t)$ n'est pas réellement instantané, mais est déjà une valeur moyenne sur la constante de temps τ caractéristique du système : $I(t) = \overline{I(t,\tau)} = \frac{dQ}{\tau}$.

L'écart-type $\sigma_I = \sigma_{\overline{I(\tau)}}$ correspond à la fluctuation de ce signal.

Si l'on suppose (ce qui est en général le cas) que l'on mesure durant des temps significativement plus long que τ , on défini :

$$\begin{cases} n_0 = \frac{T_0}{\tau} \\ n_s = \frac{T_s}{\tau} \end{cases} \Rightarrow n = \frac{T_0}{T_s} = \frac{n_0}{n_s}.$$

On en déduit les fluctuations des mesures de courants moyennés sur des durées T_0 *et* T_s :

$\sigma_{\overline{I(T_0)}} = \frac{\sigma_{I(\tau)}}{\sqrt{n_0}}$ et $\sigma_{\overline{I(T_s)}} = \frac{\sigma_{I(\tau)}}{\sqrt{n_S}}$. Comme toujours les fluctuations sont amorties par l'augmentation du temps de comptage.

Il est important de noter que ces écart-types peuvent être mesuré empiriquement par répétabilité des courants moyens durant T_0 et/ou T_s (sous-entendu on n'est pas, comme la norme le demande, obligé de faire un calcul d'incertitude).

En effet les relations précédentes supposent que l'on connaisse bien la constante de temps τ.
30 mesures suffisent, pour en plus tester l'hypothèse gaussienne des fluctuations (voir test de Kolmogorov) pour pouvoir utiliser $k_{1-\alpha}$ comme pour les comptages.

Seuil de décisions :

Pendant le temps T_S on obtient pour un échantillon un signal brut $\overline{I_s(T_s)}$. Il faut alors comparer cette valeur au seuil de décision correspondant :

Deux cas essentiels :

- Cas 1 : $T_0 = T_s$

Le seuil de décision est alors égal à $SD = \overline{I_0(T_0)} + k_{1-\alpha}\sqrt{2} \times \sigma_{\overline{I(T_s)}}$

- Cas 2 : $T_0 > T_s$

Le seuil de décision est alors égal à $SD = \overline{I_0(T_0)} + k_{1-\alpha} \times \sigma_{\overline{I(T_s)}}$

- Cas général : $T_s = \frac{T_0}{n}$: $SD = \overline{I_0(T_0)} + k_{1-\alpha}\sqrt{1+\frac{1}{n}} \times \sigma_{\overline{I(T_s)}}$

On voit par contre qu'il est préférable d'éviter $T_0 < T_s \Rightarrow n < 1$

Il est important de comprendre que si l'on pouvait en parallèle compter le nombres d'interactions dans le détecteurs, on obtiendrait des seuils de décision équivalents à ceux obtenus dans la norme 11929, cad que les décision « supérieur au seuil » seraient les mêmes sur le comptages ou le courant