ANALYSE PROBABILISTE DES MESURES NUCLEAIRES A BAS NIVEAU
PARTIE 2 :CRITIQUE RAISONNEE DE LA NORME ISO 11929-2010 PORTANT SUR LES LIMITES CARACTERISTIQUES POUR MESURAGE DE RAYONNEMENTS IONISANTS

A.Vivier[1],S.Puydarrieux[2], G.Manificat[3], M.Mokili[4], C.Rivier[5] L.Tenailleau[6], J.P. Duvail[7], B.Thaurel[8] M.Crozet[9], R.Le Meignen[10], E.Bohaud[11], V.Bruel[12] G.Le Petit[13], J.Aupiais[13], H.Guegan[14], C.Cossonnet[15], J. Guo[16], , P. Tranchant[17], J.Fazileabasse[18], X. Michel[19]

Abstract: **Experience *f*eedback regarding the implementation of the ISO 11929-2010 standard for characteristic limits in nuclear metrology shows that this is generally poorly understood by users. Its implementation causes many problems and does not significantly improve the analysis of the results and their final expression. These findings alone would demand a re-examination of the existing standard, as a guideline can only be properly applied if it is properly understood. More detailed analysis shows that this standard has fundamental major inconsistencies, however, actually affecting both its understanding and the quality of the analysis of results. Taking into account the method proposed in the first section, this analysis demonstrates that it is both necessary and possible to base a new standard on clearly- and meticulously-established principles.**

Key words: decision threshold, detection limit, uncertainty, nuclear measurements, characteristic limits, ISO 11929

Résumé : **Le retour d'expérience sur la mise en œuvre de la norme ISO 11929-2010, portant sur les limites caractéristiques en mesures nucléaires, montre que celle-ci est généralement peu comprise par les utilisateurs. Son application pose de nombreux problèmes et n'apportent pas d'améliorations significative dans l'analyse et l'expression finale des résultats. Ces seuls constats nécessiteraient à eux seuls de reconsidérer la norme existante : une règle ne peut être que bien appliquée si elle est bien comprise Mais une analyse plus poussée montre que cette norme présente sur le fond des incohérences majeures qui impactent effectivement à la fois sa compréhension et la qualité de l'analyse des résultats. Mise en regard de la méthode proposée dans la première partie, cette analyse démontre qu'il est à la fois nécessaire mais aussi possible de fonder une nouvelle norme sur des principes clairement et rigoureusement établis.**

[1] Institut National des Sciences et Techniques nucléaires CEA/Saclay 91191 Gif sur Yvette Cedex, France.
[2] AREVA-NC/La Hague/ Etudes Procédés et Statistiques – 50444 Beaumont Hague cedex, France
[3] IRSN, Direction de l'environnement et de l'Intervention
[4]Laboratoire SUBATECH – UMR 6457: Ecole des Mines de Nantes, IN2P3/CNRS, Université de Nantes
[5]CEA Marcoule DEN/DRCP/CETAMA - BP 17171, 30207 Bagnols-sur-Cèze cedex, France
[6]Groupe d'Etudes Atomique/ Marine Nationale 50100 Cherbourg-Octeville
[7]LASEM/LSR/ BCRM - BP61 83800 Toulon cedex 09
[8]RSN PDS-DEND/SATE Fontenay-aux-Roses
[9]CEA/DEN/DRCP/SERZ/LED
[10]EDF - DIN - CEIDRE, Département Laboratoires/CNPE de Chinon, BP 23, 37420 Avoine, France
[11]ANDRA DI/CA/LAC, BP7, 10200 Soulaines dhuys
[12]AREVA-NC/Pierrelatte, SET/DG/IPE, Site du Tricastin, 26700 Pierrelatte Cedex
[13]CEA, DAM, DIF , F-91297 Arpajon, France
[14]Centre d'Etude Nucléaire de Bordeaux-Gradignan, CNRS/IN2P3 Bordeaux, France
[15]IRSN Laboratoire de mesure de la radioactivité dans l'environnement Orsay, France
[16]ORTEC-AMETEK Inc, 801 S. Illinois Ave., Oak Ridge, TN 37830, USA.
[17]Techman Industrie 7 rue des Boisses 37500 Chinon France
[18] EDF/ DPN /GPRE - Ingénierie Radio Protection1 Place Pleyel 93282 St Denis Cedex
[19] Service de protection radiologique des armées, Clamart

1 INTRODUCTION. LA POSITION ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA NORME ISO 11929.

L'origine des difficultés rencontrées par les auteurs de la norme proviennent en partie de leur prise de position épistémologique extrême : voulant être bayesiens à tout prix en se revendiquant de l'Ecole dite « spéculative » (*School B, see Weise 2013 §5.5*) ils n'ont de cesse de vouloir faire disparaitre tous les aspects fréquentistes du problème. Ils se privent ainsi de la dialectique cause-effet introduite dans la première partie, schéma conceptuel à la fois heuristique et pédagogique.

L'absence de cette dialectique a trois conséquences majeures qui s'enchainent :

- Les lois de probabilités utilisées pour déterminer le seuil de décision sont, à peu de choses près, les mêmes que celles utilisées pour décrire l'incertitude dans l'espace des valeurs vraies, alors que le seuil de décision n'existe que dans l'espace des valeurs de mesures.

- Les concepts d'hypothèses H_0 et H_1,et plus généralement des tests statistiques d'hypothèses, n'apparaissent plus [*ISO 11929, Weise 2013*]. Or c'est dans ce cadre précis seulement que peuvent être introduit les concepts de risque de première et seconde espèce.

- Le théorème de Bayes n'est jamais réellement mis en œuvre, dans la mesure où il n'y a plus de loi fréquentiste à inverser.

L'une des conséquences notables de cette position est que les utilisateurs de la norme ont du mal à saisir la nature réelle du seuil de décision, ou plus prosaïquement la nature des décisions que l'on peut prendre en fonction de la position d'une mesure par rapport à ce seuil. Les risques de méprises sont encore plus élevés avec la limite de détection, dont le rôle par rapport au seuil de décision est mal perçu. Il arrive ainsi que certains utilisateurs, voire parfois certaines institutions, se débarrassent de l'un ou l'autre de ces concepts, et ne raisonnent plus qu'en termes soit de seuil de décision, soit de limite de détection, jugeant trop complexe la gestion de deux curseurs sur un même axe. Or, dans le schéma dialectique cause-effet, on comprend que le seuil de décision appartient à l'espace des effets (*valeurs de mesures*), et la limite de détection à l'espace des causes *(mesurande*). Il n'y a donc pas deux curseurs sur un même axe, mais un curseur sur deux axes différents. Perception qui au passage élimine aussi le faux–problème évoqués par certains métrologues des valeurs de mesures comprises entre le seuil et la limite, mais surtout les solutions souvent désastreuses apportées à ce type de faux problème.

L'absence d'un cadre de pensée s'inscrivant dans cette dialectique a une autre conséquence : L'analyse de l'approche proposée par les auteurs de la norme est rendue très difficile par l'emploi d'un système de notations ne faisant aucun distinguo entre valeurs de mesures, estimateurs des valeurs vraies et valeurs vraies elles-mêmes: *"Then, a random variable Y, an estimator, shall be assigned to the measurand. The symbol $\mathbf{Y}$ is also used in this clause for the measurand itself. A value y of the estimator $\mathbf{Y}$, determined from measurements, is an estimate of the measurand. It shall be calculated as the primary measurement result" (ISO 11929 §5.1)* La norme uniformise dans un même formalisme et une même conception les aspects fréquentistes et les aspects bayesiens : *« Equations are provided for the calculation of the characteristic limits of an ionizing radiation measurand via the "standard measurement uncertainty" of the measurand .(ISO 11929, Introduction).*

Ces notations ne font que traduire le mécanisme de pensé des auteurs de la norme. L'amalgame volontaire entre estimations des valeurs vraies et valeurs de mesures, véritable court-circuit conceptuel, annihile toute dialectique entre espaces des valeurs vraies et espaces des valeurs de mesure.

Cet amalgame apparait dès le début :
§ 3 terms and définition "An example of a measurand is the intensity of an energy line in a spectrum above the background in a spectrometric measurement.

Dans un tel cadre il est assez vain de vouloir mettre en place une approche bayesienne.

Une seconde origine des problèmes rencontrés par les auteurs provient de ce qu'ils n'ont pas su tirer profit de toute la puissance de l'hypothèse poissonienne, exposée dans la première partie. Ils font explicitement le constat inverse : *"But in general cases, especially in those of poor or non-statistical information as often encountered in a single radiation measurement […]",* constat qui les amènent aussitôt a fonder toute leur approche sur le principe de maximisation de l'entropie d'information (PME) : *"[…]the PME of school B and the Bernoully principle are valuable, indispensable tools for the determination of distributions and characteristic values" [Weise 2013 §5.5].* Sans jamais, paradoxalement, utiliser réellement le théorème de Bayes.

Mais au–delà de ces débats d'école, nous avons vu dans la partie 1 que les divers estimateurs bayesiens qui y sont proposés, estimateur ponctuel, limite haute etc, ne présentaient pas de différences significatives avec la norme ISO 11929 (§ 6.4 et 6.5) . Ce qui en soit est une bonne nouvelle pour les utilisateurs et les développeurs de logiciels, car cela permettrait de minimiser les modifications qui pourraient être apportées à la norme. Mais un problème majeur subsiste dans la norme vis-à-vis de ces estimateurs : en effet la norme préconise de ne les utiliser que lorsque la valeur de mesure est supérieure au seuil de décision, c'est-à-dire lorsqu'ils n'ont aucune plus-values (*cf partie 1 §3.3.4*). Ainsi la norme annihile elle-même l'intêret de toute approche bayesienne, tout en véhiculant une complexité liée à ce type d'approche qui a désarçonné de nombreux utilisateurs de la norme.

L'ensemble de ces problèmes et divergences d'approches se cristallisent autour d'un concept bayesien central : la probabilité *a posteriori* $P\left(H_0\right)$ que l'échantillon soit non radioactif . Les auteurs de la norme réfutent l'idée même qu'une telle probabilité puisse exister. Nous verrons, au-delà d'un degré de croyance tout à fait dans l'esprit bayesien, que les arguments objectifs avancés pour étayer ce refus sont eux-mêmes aisément réfutables.

2 ETABLISSEMENT DE LA LOI *A POSTERIORI* DANS LA NORME ISO11929.

2.1 LA LOI A POSTERIORI AU SENS DU GUM

Le point de départ de la démarche proposée par les auteurs de la norme s'appuie sur la construction d'une loi *a posteriori* de la valeur vraie notée $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)$. Afin de mettre la démarche de la norme ISO 11929 en regard de l'approche proposée dans cet article, une telle loi appliquée au modèle $Net = Gross - BkG$ s'écrirait plus explicitement $f_{\mu_{Net}}\left(\mu_{Net}\middle|\boldsymbol{a}=\left\{Gross, BkG\right\}, I\right)$ (*cf partie 1 rel 9*). On notera que dans le formalisme des auteurs, le symbole y représente ici l'estimation de la valeur vraie $\left(\hat{y}\right)$, et non pas la valeur de mesure $\left(y\right)$. Pour établir cette loi *a posteriori*, les auteurs de la norme adoptent une démarche en deux temps :

1) A partir du résultat d'une mesure y_1 et de son incertitude usuelle $u\left(y_1\right)$ au sens du GUM, les auteurs postulent que la loi *a posteriori* doit être une densité de probabilité centrée sur y_1 et d'écart-type $u\left(y_1\right)$. Une telle approche est conforme à l'approche implicite du GUM.

2) Ils utilisent ensuite le principe de maximisation de l'entropie d'information (*PME, voir remarque ci-après*) pour justifier le caractère gaussien de cette loi *a posteriori*. La loi $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)$ est ainsi décrite par la densité gaussienne $\mathcal{N}\left(\mu = y_1 ; \sigma = u(y_1)\right)$. Là encore on retrouve l'approche implicite du GUM, qui utilise des incertitudes élargies dont les niveaux de confiance sont cohérents avec des distributions gaussiennes.

Plusieurs remarques peuvent être émises à l'encontre de cette méthode :

- Conforme à l'usage, elle est admissible tant que l'on ne s'approche pas des bornes d'un prior. De telles bornes n'existent pas dans la conception du GUM.

- Elle n'utilise aucunement ni le théorème de Bayes ni aucune loi de Poisson fréquentiste qu'il conviendrait d'inverser. Elle ne nécessité de plus aucune loi *a priori* particulière pour son établissement.

De ce dernier point il découle entre autres que la loi *a posteriori* $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)$, comme toute loi gaussienne, est définie de $-\infty$ à $+\infty$. Elle est ainsi dans un premier temps incohérente avec la contrainte d'un mesurande non négatif. Soulignons qu'une telle méthode peut être admise en tant qu'approche simplifiée pseudo-bayesienne lorsque une mesure est significativement très supérieure au seuil de décision, la partie négative de la gaussienne étant alors négligeable.

La démarche des auteurs va consister pour l'essentiel à adapter cette même loi $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)$ au cas d'un mesurande non négatif mais aussi au cas de la détermination du seuil de décision.

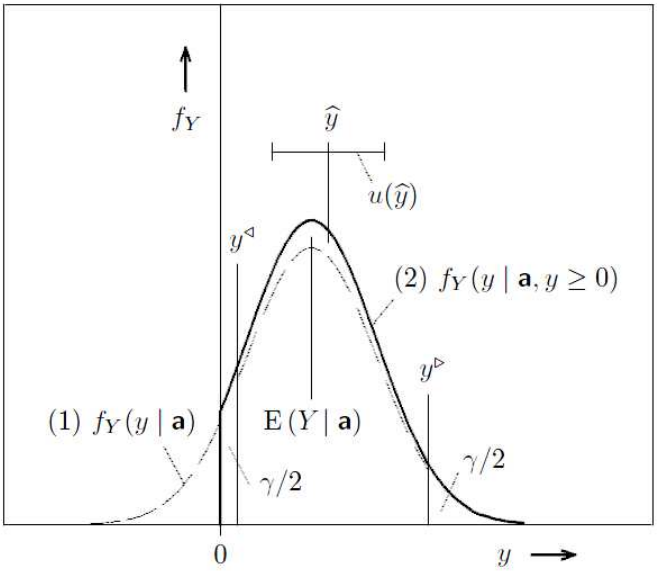
Remarque : Le PME permet de probabiliser des informations partielles, en l'absence de loi de probabilité complète. Il est souvent utilisé en amont du théorème de Bayes pour transformer des informations initiales en loi a priori. L'idée forte de ce principe est d'obtenir une loi de probabilité avec le moins de contraintes possibles vis- vis des informations manquantes, tout en respectant les contraintes sur les informations connues. Construit par analogie avec l'entropie au sens de Bolztman, on y retrouve quelques similitudes. La loi obéissant au PME est la plus « diffuse » possible tout en respectant les contraintes, ce que montrent quelques analogies physiques :

- *La densité d'un gaz au repos contenu dans une boite est uniforme : de même l'application du PME à la densité d'une variable aléatoire dont on ne connait qu'une réalisation minimale* a *et maximale* b *est une loi uniforme sur* $[a,b]$.

- *Une bouffée de gaz relâchée à partir d'un point évolue en densité comme une gaussienne tridimensionnelle centré sur le point initial : le résultat de l'application du PME à une loi dont on ne connait que la valeur moyenne* μ *et l'écart-type* σ *est une loi gaussienne* $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma\right)$.

2.2 MESURANDE NON NÉGATIF ET TRONCATURE DE LA LOI *A POSTERIORI*

Pour respecter la condition du mesurande non-négatif $y \geq 0$ (*là encore, cette expression doit être comprise comme,* $\tilde{y} > 0$ *ou* $\hat{y} > 0$) les auteurs se contentent de tronquer purement et simplement la gaussienne $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)$ à l'origine, présentant cette opération comme l'application d'une loi *a priori* modélisée par la fonction de Heavyside $H(t) = \{0 \text{ if } t < 0;\ 1 \text{ if } t > 0\}$. Mais une telle opération ne peut être appliquée qu'à une fonction de vraisemblance pour obtenir une loi *a posteriori*, pas à une loi *a posteriori* elle-même. Cette opération de troncature n'est guère plus qu'un ajustement tardif à la réalité du mesurande non-négatif, réalité qu'il aurait fallu prendre en considération *ab-initio*. Au mieux, et malgré une méthode ne respectant pas la rigueur de formalisme bayesien, le résultat pourrait être accepté en l'état car cette gaussienne tronquée est effectivement une approximation acceptable de la loi obtenue par convolution dans la partie 1 sous hypothèse poissonienne (cf partie 1 § 3.3.1 rel 9). A ce niveau, cette convergence des résultats, entre l'approche proposée en première partie et l'approche de la norme 11929 est heureuse, car elle permet d'imaginer une nouvelle norme qui ne bouleverse pas trop les usages actuels. Cependant une divergence plus importante apparaît par la suite : pour respecter la contrainte d'une surface unitaire, les auteurs normalisent la gaussienne tronquée en la divisant par sa propre surface. Cette gaussienne tronquée et normalisée est notée $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}, y \geq 0\right)$. Cette opération de troncature suivie d'une normalisation est explicitée sur le graphe1,***(cf figure 1 Weise 2013)*** :



Graphe 1:Troncature et normalisation multiplicative de la loi a posteriori $f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)$ ***(extrait ISO 11929)***

Deux effets dommageables de cette normalisation multiplicative apparaissent immédiatement :

- Effets 1 : Des effets aberrants générés par la modification des densités de probabilités initialement correctes (*voir ci-après § 2.3*)

- Effet 2 : La disparition de l'information fondamentale $P\left(H_0\right)$, qui est ici égale à la surface $I_0 = \int_{-\infty}^{0} f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}\right)dy$ (*cf partie 1 rel 13*). Cette surface tronquée est réintroduite sur la partie positive en divisant toute les valeurs par la surface résiduelle $1 - I_0$. Cette opération de normalisation multiplicative « classique », qui est de l'ordre du réflexe conditionné, ne permet plus de tenir le raisonnement justifiant la possibilité d'estimer $P\left(H_0\right)$ (*cf partie 1 §3.3.2*). Pour justifier cette impossibilité, les auteurs vont arguer de la nécessité d'utiliser un prior de Jeffrey de la forme $g(\mu|I) = 1/\mu$ non défini pour $\mu = 0$, alors qu'ils utilisent plus ou moins explicitement en permanence des flats prior (*voir ci-après cf § 2.4*).

Remarque 1: .Dans l'annexe F de la norme ISO 11929, les auteurs donnent le sentiment d'utiliser une méthode plus rigoureuse en introduisant le théorème de Bayes. le PME est appliqué dans le même esprit à la fonction de vraisemblance, avec la fonction de Heavyside comme prior. Mais le théoèreme de Bayes y est écrit : $f\left(\tilde{y}\middle|y\right) = C\, f_0\left(\tilde{y}\middle|y\right).f(\tilde{y})$. La fonction de vraisemblance n'est donc pas une fonction de vraisemblance, qui devrait s'écrire en toute rigueur $f_0\left(y\middle|\tilde{y}\right)$, formulation jugée sans doute trop fréquentiste aux yeux des auteurs. Les deux méthodes sont donc bien équivalentes, et dans les deux cas l'étape initiale d'inversion bayesienne de la loi fréquentiste n'existe pas.

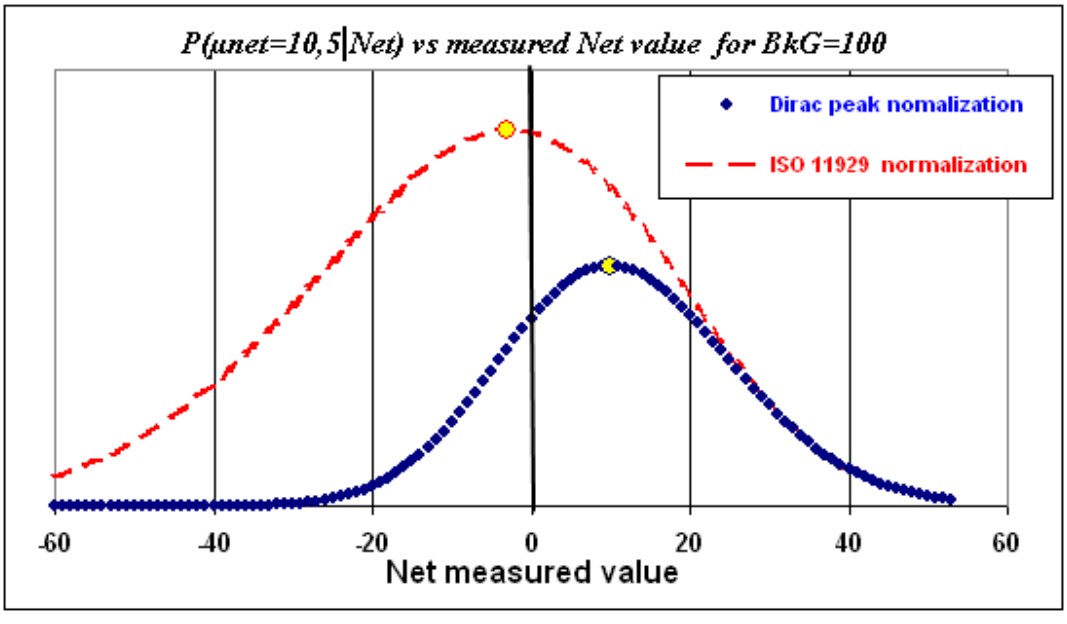
Remarque 2 : Le seul passage évoquant explicitement une loi fréquentiste notée $f\left(y\middle|\tilde{y}\right)$ est présentée dans l'annexe F comme résultant d'une inversion bayesienne de la loi $f\left(\tilde{y}\middle|y\right)$. Cela

consisterai à retrouver la loi de Poisson en inversant la loi Gamma. De plus l'écart-type σ de cette loi $f\left(y|\tilde{y}\right)$, qui représente la dispersion physique et mesurable des résultats de mesure, est présenté comme une incertitude $\tilde{u}\left(\tilde{y}\right)$ associé à une valeur vraie connue, en contresens total du concept d'incertitude. Cela montre bien les difficultés rencontrés par les auteurs dans l'application des principes bayesiens et les contresens permanents qu'ils entretiennent.

Remarque 3 : le passage de $f_Y\left(y|\boldsymbol{a}\right)$ à $f_Y\left(y|\boldsymbol{a}, y \geq 0\right)$ n'est pas nécessaire dans l'approche proposé dans la première partie. En effet la loi *a posteriori* $f_{\mu_{Net}}\left(\mu_{Net}|\boldsymbol{a} = \{Gross, BkG\}, I\right)$, mettant en jeu des paramètres de la loi de poisson ne peut être définie *ab initio* que pour des valeurs positives ou nulles de μ_{Net} , en tant que paramètre d'une loi de Poisson.

2.3 EFFETS ABERRANTS DE LA NORMALISATION MULTIPLICATIVE :

La normalisation multiplicative consiste à diviser chaque valeur $f\left(\tilde{y}|y\right)$ par $1-P(H_0)$), c'est-à-dire à multiplier par une constante de plus en plus grande lorsque la valeur nette mesurée est faible. Intéressons nous par exemple à la fonction vraisemblance de l'hypothèse $\mu_{Net} = 10{,}15$ pour une mesure de bruit de fond $BkG = 100$, en fonction de la valeur nette échantillon mesurée. Avec une loi *a posteriori* normalisée avec un pic de Dirac égal à $P\left(H_0\right)$, le maximum de vraisemblance est obtenue avec $Net = 10$, ce qui parait légitime et intuitivement vraisemblable. Avec la normalisation multiplicative, on obtient un maximum de vraisemblance avec $Net = -3$. Cet effet aberrant montre que la normalisation multiplicative « réflexe », aussi habituelle soit-elle, génère dans le cas présent des incohérences majeures (*cf graphe 2*).



Graphe 2 : effets aberrants de la normalisation multiplicative

2.4 LE PRIOR DE JEFFREY PRIOR ET LA PROBABILITÉ D'ÊTRE NON-RADIOACTIF.

Pour les auteurs de la norme, il est important de récuser l'idée même qui l'on puisse considérer la possibilité que l'échantillon puisse être non-radioactif, car cela remettrait en cause leur méthode de normalisation. C'est pour cette même raison qu'ils font disparaître, à partir de 2006, toute référence à la méthode des tests d'hypothèse et au concept d'hypothèse H_0. L'une des raisons invoquées pour justifier l'impossibilité, ou l'inutilité, de calculer $P(H_0)$ est, selon les auteurs, la nécessité d'utiliser un prior de la forme $g(\mu)=C/\mu$, ou prior de Jeffrey. Cependant l'utilisation d'un tel prior n'est en rien une obligation, l'inverse étant contraire à l'esprit bayesien. Plusieurs auteurs prennent en considération le calcul de $P(H_0)$ (*Gregory 2005, Vivier 2007, Miller 2008, Kirpatrick 2009, Rivals 2012)*

Un prior de Jeffrey n'est autre qu'un flat prior sur une échelle logarithmique :

$$f_{log}(\mu)=C \Rightarrow \frac{dP(\mu)}{dln(\mu)}=C \quad with\ dln(\mu)=\frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \frac{\mu\, dP(\mu)}{d\mu}=\mu f_{lin.}(\mu)=C \Leftrightarrow f_{lin.}(\mu)=\frac{C}{\mu}\ ,\ \mu \neq 0.$$

Un tel prior exclut effectivement *a priori* la valeur $\mu=0$, ôtant ainsi toute possibilité et intérêt de vouloir calculer $P(H_0)$. Cependant les auteurs de la norme ne s'appuient pas sur des considérations d'échelle pour justifier de l'emploi d'un tel prior, mais sur une démonstration aussi belle que, hélas, totalement erronée [*Weise 2013*], démonstration que nous allons reproduire et analyser :

Soit ρ un taux de comptage vraie, on considère à juste titre que ρ ne dépend pas du temps de mesure t, ce que l'on traduit en écrivant pour la loi de probabilité de l'estimation de ρ : $f(\rho|t)=f(\rho)$. Puis on introduit un changements de variable en considérant la valeur de comptage vraie ρt. La loi de la variable ρt obéit effectivement à la relation $g(\rho t)=f(\rho)/t$.Cette transformation générale est valable pour toutes densité de probabilités, même lorsque celle-ci est initialement connue, de nature gaussienne par exemple. Mais aussi lorsque l'on remplace la durée de comptage t par tout autre grandeur indépendante du taux de comptage (température, hygrométrie, distance –terre-lune…).

Démonstration générale (*non-donnée par les auteurs de la normes):* Soit x une variable aléatoire de densité $f(x)$ quelconque, connue ou non, et $\boldsymbol{a}$ une constante dimensionnée ou non non nulle (*en lieu et place de la durée de comptage* t). On s'intéresse au changement d'échelle ou d'unité $y=\boldsymbol{a}x$. Les lois de probabilités permettent d'écrire :

$$P(x-dx/2<x<x+dx/2)=f(x)dx=P(\boldsymbol{a}x-\boldsymbol{a}dx/2<\boldsymbol{a}x<\boldsymbol{a}x+\boldsymbol{a}dx/2)\ =f(\boldsymbol{a}x)d(\boldsymbol{a}x) \Rightarrow$$

$$f(x)dx=f(\boldsymbol{a}x)d(\boldsymbol{a}x)=\boldsymbol{a}\,f(\boldsymbol{a}x)dx \Rightarrow f(x)=\boldsymbol{a}f(\boldsymbol{a}x) \Rightarrow f(\boldsymbol{a}x)=\frac{1}{\boldsymbol{a}}f(x)$$

Si par exemple x suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$, alors ax suit effectivement la loi $\mathcal{N}(\boldsymbol{a}\mu;\boldsymbol{a}\sigma)$ (*propriétés élémentaires des opérateurs variance et espérance*) soit :

$$f(\boldsymbol{a}x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\boldsymbol{a}\sigma)^2}}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{a}x-\boldsymbol{a}\mu)^2}{2(\boldsymbol{a}\sigma)^2}\right]=\frac{1}{\boldsymbol{a}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]=\frac{1}{\boldsymbol{a}}f(x)$$

Le problème apparait lorsque les auteurs de la norme décident de dériver la relation $f(\rho)=tg(\rho t)$ par rapport à t, oubliant par la que la grandeur t est une durée de comptage déterminée, pas la variable temps usuelle en physique. Ils obtiennent une équation différentielle :

$$\partial f(\rho)/\partial t=0=\partial\left(tg(\rho t)\right)/\partial t \ \Rightarrow g(\rho t)+\rho t g'(\rho t)=0$$

La solution d'une telle équation différentielle est effectivement de la forme $f(\rho)=C/\rho$, où l'on retrouve le prior de Jeffrey. Si l'on suit les auteurs sur cette pente, cela signifie que l'on peut transformer une loi gaussienne en en loi en $1/x$.

La conséquence d'une telle erreur est d'imposer à tord un prior qui de plus complique singulièrement les choses sans apporter la moindre plus –value dans ce problème, bien au contraire. Tout d'abord, la loi gamma obtenues par les auteurs avec un prior de Jeffrey s'écrit :

$$f_R(\rho|N,t)=\frac{t\,e^{-\rho t}(\rho t)^{N-1}}{(N-1)!}$$

Une telle loi gamma ne peut effectivement pas être défini pour un comptage brut $N=0$. Devant cette difficulté, les auteurs recommandent de compter suffisamment longtemps pour ne plus avoir une valeur de comptage nulle. C'est ici un bel exemple d'une solution inutile apportée à un faux–problème. Ce problème, comme les autres, n'apparait pas avec un flat prior, et l'on peut légitimement définir un seuil de décision avec $BkG=0$ (cf partie 1 §3.2.3) Devant ces difficultés, les auteurs commencent par discuter d'un prior de Jeffrey de la forme $1/\sqrt{\rho}$. Puis ils abandonnent cette piste pour reprendre, du bout des lèvres, un prior de Jeffrey de la forme $1/\rho^{\nu}$ « avec $\nu=0$ » [*Weise 2013*], c'est-à-dire un flat prior, qu'ils utilisent par ailleurs plus ou moins explicitement en permanence dans tous leur articles.

Ainsi, loin de montrer que le calcul de $P(H_0)$ est illusoire, la démonstration des auteurs montrent surtout le manque de rigueur dans l'utilisation et la compréhension des outils mathématiques probabilistes.

,

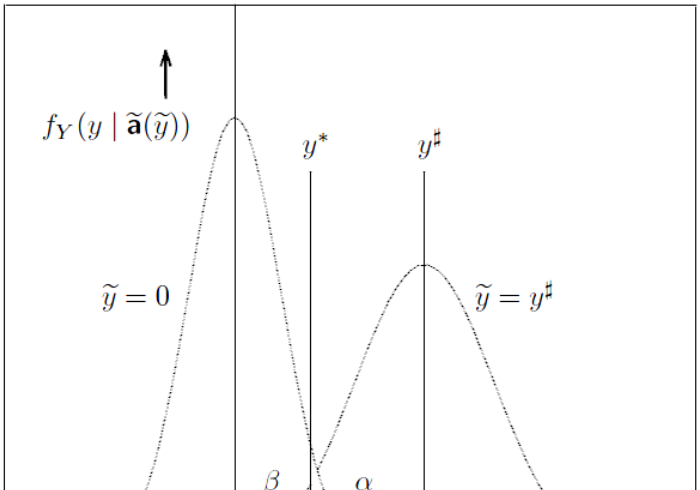
3 LA DÉTERMINATION DU SEUIL DE DÉCISION DANS LA NORME ISO 11929.

Les auteurs utilisent la loi *a posteriori* $f_Y(y|\boldsymbol{a})$ **non tronquée** pour établir le seuil de décision et la limites de détection. Or, cette loi prenant ses valeurs dans l'espace des valeurs vraies, une telle utilisation introduit immédiatement deux incohérences majeures :

- Tout d'abord les valeurs vraies étant non-négatives, ces lois ne peuvent s'étendre sur la partie négative, contrairement à ce qu'indique le graphe 3, (*cf figure 2 Weise 2013*).

- D'autre part, elles sont incapables de définir des risques fréquentistes d'erreur de première et seconde espèce.

Remarque : l'utilisation de loi $f_Y(y|\boldsymbol{a})$ *non tronquée impropre est inévitable dans cette approche discutable si l'on veut retrouver à terme une formule acceptable pour le seuil de décision. En effet, si la loi était tronquée comme il se doit, le facteur de normalisation serait alors égal à 2, correspond en fait à la division par* $1\text{-}P(H_0)=0{,}5$ *dans le cas* $Net=0$ (ou encore $\tilde{y}=0$ dans la norme). *Ce qui aboutirait à un risque* α *deux fois trop élevé.*



Graphe 3 : construction seuil de décision et limite de détection dans la norme ISO 11929

A nouveau, la méthode proposée permet d'éviter l'application du théorème de Bayes. Elle est fondée exclusivement sur le constat de certaines analogies numériques :

- Dans l'approche des auteurs, la loi $f_Y\left(y|\boldsymbol{a}\right)$ est une gaussienne centrée sur la valeur de mesure Net prise comme estimateur de la valeur vraie centrale et d'écart-type $u(Net)=\sqrt{Gross+BkG}=\sqrt{Net+2BkG}$, dont on peut déduire l'expression de l'incertitude élargie $U(Net)=k\sqrt{Net+2BkG}$ (1)
- Dans l'approche de Currie, la distribution de l'hypothèse H_0 est une gaussienne discrétisée centrée sur 0 et d'écart-type $\hat{\sigma}_{H_0}=\sqrt{2BkG}$, dont on déduit l'expression classique du seuil de décision $\hat{L}_c(Net)=k_{1-\alpha}\,\hat{\sigma}_{H_0}=k_{1-\alpha}\sqrt{2BkG}$ (2)

On voit bien qu'il suffirait que la valeur mesurée Net soit égale à 0 pour que, oubliant que l'une, continue, prend ses valeurs dans l'espace de valeurs vraies et l'autre, discrétisée, dans l'espace des valeurs de mesures, les deux gaussiennes se superposent. En prenant soin bien évidemment de prendre un niveau de confiance de 5 % et un risque alpha de 2,5 % pour que les quantiles k et $k_{1-\alpha}$ coïncident, alors qu'ils sont indépendants. (*où l'on retrouve à nouveau le risque de confusion entre incertitude et seuil de décision*). De plus, les auteurs étant conscients que le seuil de décision doit être calculé avant la mesure échantillon, cette valeur Net, imposée par la mesure et non pas choisie au gré du métrologue, est pour eux une gène : *« For instance, the result of a gross-effect radiation measurement is missing in this case since the decision threshold and the detection limit, as characteristics of the measurement procedure should be known before the first gross-effect measurement is carried out. A suitable true measurand value* $\tilde{y}\geq 0$ *is then assumed for an indirect compensation" [Weise 2013 § 2.4].*

Cette compensation indirecte, terme très vague qui cache mal le malaise des auteurs, consiste à remplacer dans la relation (1) la valeur de mesure Net par un ersatz de valeur vraie $\tilde{y}$, qui n'est pas la valeur vraie recherchée, mais de fait un simple paramètre libre : « *This assumed true measurand value* $\tilde{y}$ *is neither the true measurand value itself nor an estimate of it but can freely be chosen » [Weise 2013, §2.4].* Dans notre système de notation, on introduirait alors la « valeur vraie assumée » $\tilde{N}et=\mu_{net}$. (3) en lieu et place de la mesure la valeur mesurée :

$$Net=\mu_{Net}=Gross-BkG\Rightarrow Gross=\mu_{Net}+BkG \quad (4)$$

Remarque : Pour un utilisateur averti des méthodes bayesiennes, une telle substitution est plus qu'incompréhensible : remplacer une valeur de mesure par une valeur vraie, quelle qu'elle soit, est la négation du problème d'incertitude.

On injecte ensuite la relation (4) dans l'expression (1) de l'incertitude classique, et l'on obtient la quantité $\tilde{u}(\mu_{Net})=\sqrt{\mu_{Net}+2BkG}$ (5), ou « *incertitude associé à une valeur vraie assumée* », grandeur qui joue un rôle central dans la norme ISO 11929. Nous ne reviendrons pas sur le non-sens profond de ce concept (*voir remarque ci-dessus*). Mais si 'on y regarde de plus près, on constate

plusieurs choses sur la nature réelle de cette valeur vraie assumée $\tilde{y}$ (μ_{Net}) introduite par les auteurs :

- Elle est initialement égale à la valeur mesurée (eq. 3)
- Elle a la même incertitude (eq 1 et 5)
- Elle prend exactement sa place dans le modèle de la mesure (eq 4).

On en conclut que rien ne permet mathématiquement de distinguer $\tilde{y}$ de la valeur de mesure Net (ou y). La seule différence, qui n'est pas de nature mathématique, est que $\tilde{y}$ représente implicitement dans l'esprit des auteurs une valeur de mesure virtuelle à laquelle on peut donner une valeur arbitraire. En aucun cas, cette grandeur n'a, de près ou de loin, le statut de valeur vraie.

Il ne reste plus alors aux auteurs qu'à **postuler** que le seuil de décision est égal à (*cf rel 20 ISO 11929-2010*):

$$y^* = L_c(Net) = k_{1-\alpha}\tilde{u}(\mu_{net} = 0) = k_{1-\alpha}\tilde{u}(0) = k_{1-\alpha}\sqrt{\cancel{\mu_{Net}} + 2BkG} = k_{1-\alpha}\sqrt{2BkG}$$

Et le tour est joué. On retrouve effectivement le seuil de décision classique. Il eut été plus simple et plus direct, mais strictement équivalent sur un plan mathématique, d'écrire $y^* = L_c(Net) = k_{1-\alpha}u(Net = 0)$. Cela aurait évité l'introduction du concept intermédiaire $\tilde{u}(\tilde{y})$, concept fort discutable qui devrait en toute rigueur s'annihiler de lui-même. L'introduction de $\tilde{y} = 0$ représente bien évidemment dans l'esprit des auteurs une hypothèse H_0 qui ne dirait pas son nom. On pourrait accepter une telle méthode fondée sur une approximation, car elle semble finalement donner une valeur numérique acceptable du seuil de décision. Mais cela est difficilement recevable pour de multiples raisons :

Raison 1 :Le résultat est conforme au seuil de décision classique, mais pas au seuil de décision $L_c(Net) = k_{1-\alpha}\sqrt{2(BkG+1)}$ obtenue dans une approche bayesienne rigoureuse et indispensable pour les très basse valeurs de comptages.

Raison 2 : Cette méthode n'obéit pas au principe d'équivalence entre seuil sur une valeur nette et seuil sur une valeur brute. En effet, le même raisonnement appliqué à une statistique brute donnerait :

$$Brut = Net + BkG \text{ et } u(Brut) = \sqrt{Brut} = \sqrt{Net + BkG}$$
$$\Rightarrow \tilde{u}(\mu_{Brut}) = \sqrt{\mu_{Brut}} = \sqrt{\mu_{Net} + \mu_{BkG}} \Rightarrow \tilde{u}(0) = \sqrt{\mu_{BkG}} = \sqrt{BkG}$$
$$\Rightarrow L_C(Brut) = BkG + k_{1-\alpha}\sqrt{BkG}\left(\neq BkG + k_{1-\alpha}\sqrt{2BkG}\right)$$

Il manque définitivement le facteur « 2 » sous la racine, sans même parler du terme « +1 ». On obtient un seuil de décision sur les valeurs brutes non cohérent avec le seuil de décision sur la valeur nette . La violation du principe d'équivalence (*cf partie 1 §3.3.5*) montre que l'approche des auteurs est erronée sur un plan fondamental.

Raison 3 : le défaut principal de cette approche, déjà signalé, est que le concept de risque de première espèce ne peut pas être défini. En effet, malgré les transformations subies, la loi de probabilité utilisée reste une densité de probabilité noté par les auteurs $f_Y\left(y\middle|\tilde{\boldsymbol{a}}(\tilde{y}=0)\right)$. Cette loi n'est autre (*du moins pour sa partie positive)* que $h\left(\mu_{Net}\middle|Gross_1\,;BkG_1\,;I\right)$ (*cf partie 1 rel 9*) obtenue dans le cas particulier $Gross_1 = BkG_1 \Leftrightarrow Net = 0$. Le risque $\alpha = \int_{y^*}^{+\infty} f_Y\left(y\middle|\boldsymbol{a}(\tilde{y}=0)\right)dy\ \alpha$ de la norme ISO 11929 (*rel. 17 Weise 2013*) représente alors en toute rigueur la probabilité que la valeur vraie du mesurande dépasse la valeur du seuil de décision lorsque le comptage net d'un échantillon quelconque est nul.

Rappelons que le risque α, dans le cadre de la théorie de tests d'hypothèses, est la probabilité qu'une valeur de mesure dépasse le seuil de décision lorsque la valeur vraie est nulle.

Raison 4 : Contrairement à l'expression générale du seuil de décision $Lc = k_{1-\alpha}\sigma_{H_0}$ (cf partie 1 rel 4), fondée sur la dispersion mesurable des mesures à vide, la définition du seuil de décision de la forme $Lc = k_{1-\alpha}\tilde{u}(\mu_{net} = 0)$, homogène à une incertitude, s'oppose à toute détermination du seuil de décision par des mesures de répétabilité à vide. Or une telle méthode peut s'avérer précieuse dans tous les cas, notamment dans le cas de systèmes complexes rendant difficile une approche analytique. De plus une approche expérimentale reste moins fragile car elle ne dépend pas du choix d'hypothèses qui pourraient s'avérer fausses dans certains cas, comme par exemple l'hypothèse de comptages poissonniens

4 LA DÉTERMINATION DE LA LIMITE DE DETECTION DANS LA NORME ISO 11929. PRISE EN COMPTE DES INCERTITUDES DE TYPE B

La prise en compte des incertitudes de type B dans la détermination de la limite de détection est .l'un des principaux objectifs de la norme. Ces incertitudes sont essentiellement associées au facteur de conversion W permettant de convertir les valeurs de comptages en termes de taux de comptages, d'activité, absolue ou spécifique.

Remarque : le facteur W *défini dans la norme correspond au facteur* $1/\varepsilon T$ *utilisé dans la première partie (cf …). On en déduit que* $u_\varepsilon / \varepsilon = u_W / W$

La formule proposée dans la norme, obtenue après plusieurs niveaux d'approximation (ISO 11929, §6.3) est analogue à la formule 27b proposée dans la partie 1 obtenue sans approximation:

$$y^{\#} = \frac{2y^* + k^2 c_1}{1 - k^2 c_2} \quad \text{(ISO 11929 rel. 28)}$$

$$L_D = y^{\#} = \frac{2L_C + k_{1-\beta}^2}{1 - \left(u_\varepsilon / \varepsilon\right)^2 k_{1-\beta}^{*2}} \quad \text{(partie 1 rel. 29b)}$$

La différence essentielle provient de la valeurs des fractiles utilisés dans ces formules, notés respectivement k dans la norme et $k_{1-\beta}^{*2}$ dans la partie 1. En effet la norme s'appuie sur une modélisation gaussienne qui ne tient pas compte des asymétries générées par les incertitudes élevées sur le facteur de conversion (cf partie 1 § 3.6). Cette approximation implique des valeurs k indépendantes de l'incertitude relative sur W : $k = 1,96$ pour $\beta = 2,5\%$ et $k = 1,64$ pour $\beta = 5\%$.

La conséquence majeure de cette approximation est que la formule proposée dans la norme donne des valeurs qui tendent vers l'infini lorsque l'incertitude relative tend vers des valeurs limites : respectivement 51 % pour $\beta = 2,5\%$ et 61 % pour $\beta = 2,5\%$. Au delà, les limites de détections sont négatives.

Ces effets aberrants non physiques ne correspondent à aucune réalité et ne sont que de faux problèmes. L'utilisation d'une modélisation plus réaliste montre que des limites de détections sont

parfaitement calculables bien au delà de ces valeurs limites, avec de plus aucune augmentation dramatique (cf graphe XX et YY). Ils montrent que l'approximation gaussienne dont usent et abusent les auteurs de la norme au nom du principe de maximisation de l'entropie d'information rencontre là un problème rhédibitoire. Les facteurs d'erreurs générés par cette approximation sont sans limites (voir tableaux XX et YY)

Devant ce problème soulevé par Kikrpatrick (*Kirkpatrick et al., 2012)),* les auteurs de la normes ont cette réponse surprenante :

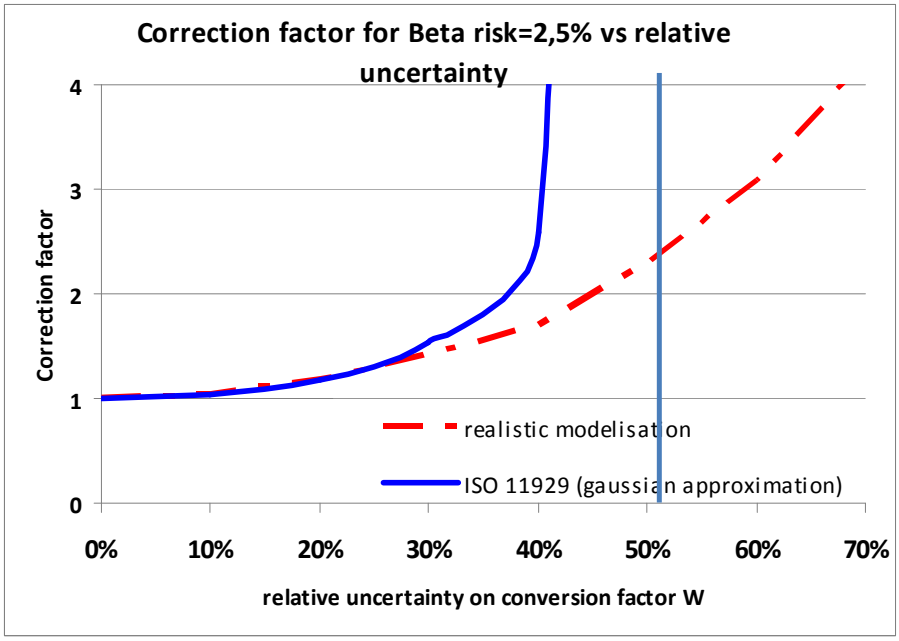
« However, $y^{\#}$ can apply infinite or negative values, which, for instance,follow from equation (28) of ISO 11929 if the denominator vanishes or is negative,respectively. This possibility of exceptional, physically meaningless values is criticized by reference [44] (Kirkpatrick et al., 2012) as an inacceptable shortcoming of the standard, but it should instead better be taken as a great advantage ! The exceptional values provide a strong hint that the measurement procedure is unsuitable, even in a case where no guideline value y_r is specifed. Then the procedure and the input information must be revised and 28 improved, e.g., by choosing longer measurement durations to reduce involved count rate uncertainties, by more realistically assessing uncertainties of calibration or influence factors, or by refining the model"(Weise 2012, § 5.10 Exceptional values of the detection limit)

The assertion that this behavior is a "great advantage" does not even seem like a serious response; the idea that instruments and measurements should be redesigned to accommodate this standard, as a result of behavior that is essentially an arbitrary artifact produced by a mathematical approximation, is not practical in many fields.

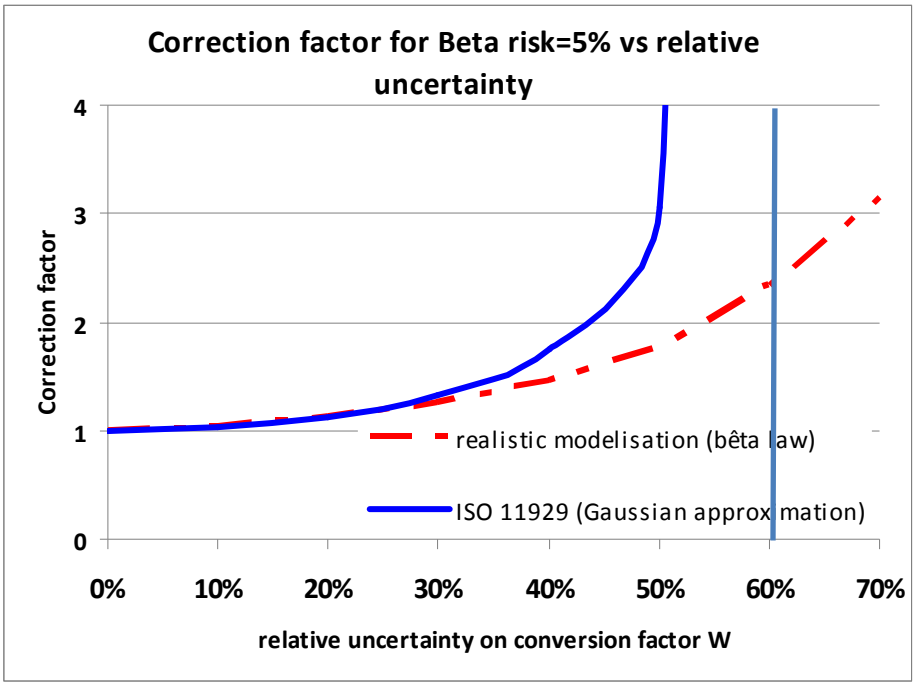
L'utilisation de lois Bêta permettant une prise en compte plus réaliste des incertitudes élevées sur les facteur de conversion permet de proposer, à l'aide de simultation Monte-Carlo, une évolution des fractiles $k^{*2}_{1-\beta}$ en fonction des incertitudes relatives sur W .

On constate l'augmentation rapide du facteur d'erreur lorsque l'incertitude relative s'approche du pôle de la relation 28 de ISO 11929 (*caractère gras italiques*).

Beta risk=2,5%				
u_W/W	$k^*_{1-\beta}$	Correction factor $1/\left(1-\left(k^*_{1-\beta}\,u_W/W\right)^2\right)$	ISO 11929 $1/\left(1-\left(1,96\,u_w/W\right)^2\right)$	Error factor Rel 28/rel 29 b
10%	1,96	1,04	1,04	1,00
20%	1,96	1,18	1,18	1,00
30%	1,80	1,41	1,53	1,08
40%	1,60	1,69	2,60	1,5
50%	1,50	2,29	25,3	11
50,5%	***1,5***	***2,38***	***116***	***49***
60%	1,37	3,08	/	∞
70%	1,25	4,27	/	∞
80%	1,16	7,20	/	∞
90%	1,07	13,77	/	∞
100%	0,98	25,25	/	∞
110%	0,90	50,25	/	∞
120%	0,83	125,25	/	∞
200%	0,50	500,25	/	∞



Beta risk=5%				
u_W/W	$k^*_{1-\beta}$	$1\Big/\left(1-\left(k^*_{1-\beta}\,u_W/W\right)^2\right)$	$1\Big/\left(1-\left(1{,}96\,u_W/W\right)^2\right)$	Error factor
10%	1,64	1,03	1,03	1,00
20%	1,64	1,03	1,12	1,09
30%	1,50	1,12	1,32	1,18
40%	1,40	1,25	1,76	1,40
50%	1,32	1,46	3,05	2,10
60%	1,26	1,77	31,50	17,7
60,5	***1,26***	***1,77***	***173,86***	***98***
70%	1,18	2,33	/	∞
80%	1,10	3,15	/	∞
90%	1,03	4,43	/	∞
100%	0,96	7,11	/	∞
110%	0,89	12,76	/	∞
120%	0,82	24,06	/	∞
200%	0,50	31,50	/	∞



5 ANALYSE DES RÉSULTATS DANS LA NORME ISO 11929

Il est intéressant de montrer les résultats obtenus dans l'application de la norme ISO 11929 dans l'analyse finale des trois échantillons proposés dans la partie 1. Dans un premier temps, on pourrait penser, compte –tenu des différences peu significatives sur les limites caractéristiques (cf partie 1 §3.3.4) que la seule différence réelle serait l'absence du calcul de $P(H_0)$. Mais ce serait là un moindre mal, car l'application à la lettre de la norme ISO 11929 donnerait le tableau suivant que l'on comparera au tableau 3 de la première partie:

Résultats ISO 11929 Norme respectée	**Echantillon 1**	**Echantillon 2**	**Echantillon 3**
1) Estimateur ponctuel bayesien $\hat{\mathcal{A}}$	18,5 Bq	Effet non détecté	Effet non détecté
2) Incertitude bayesienne $u\left(\hat{\mathcal{A}}\right)$	4,7 Bq	/	/
3) Intervalle bayesien de confiance à 95%	$[9\,Bq; 27Bq\,]$	/	/

Tableau3 : résultat d'analyse suivant norme ISO 11929

La pauvreté des informations fournies pour les échantillons 2 et 3 est frappante. La différence essentielle est lié au fait que les auteurs de la norme insistent sur le fait qu'il ne faut calculer les estimateurs et les intervalles de confiance que dans le cas où la valeur de mesure est supérieure au seuil de décision, c'est-à-dire lorsque l'approche bayesienne ne présente plus guère d'intérêt (*cf partie 1 §3.3.4*) :

"The confidence interval (Figure 4) includes for a result y of a measurement, which exceeds the decision threshold y^* *the true value of the measurand with a probability* $1-\gamma$ *». (Weise 2006* p 56; *ISO 11929 annexe F §2.5*)

"*If* $y > y^*$ *and with* ω *according to Equation (31), the best estimate* $\hat{y}$ *of the measurand is given by*…." *(ISO 11929 §6.5)*

"ISO 11929 requires the best estimate $\hat{y}$ *, the associated standard uncertainty u(by), and the limits* $y^{\triangleleft}$ *and* $y^{\triangleright}$ *of the coverage interval to be determined only if* $y_0 > y^*$ » (Weise 2013 §4.4)

Cette position apparait dès l'introduction de la norme :

« the "limits of the confidence interval" enclose, in the case of the physical effect recognized as present, (i.e; if $y > y^*$ *) a confidence interval containing the true value of the measurand with a specified probability""*

C'est faire ainsi jouer au seuil de décision un rôle qu'il n'a pas : le calcul des estimateurs bayesiens est indépendant du seuil de décision. Là encore apparait de façon frappante et fort dommageable la confusion entre espace des valeurs vraies et espace des valeurs de mesures.

Après avoir exposé une approche dite « bayesienne » d'une rare complexité, les auteurs anéantissent eux-mêmes leur propre construction sur la simple idée reçue qu'en dessous du seuil de décision, il n'est pas possible d'avoir des informations significatives. La seule information délivrée est alors « effet non détecté » et une série d'anti-slash en lieu et place d'informations quantitatives pertinentes.

Il est important de noter qu'à aucun moment les auteurs ne préconisent *a minima* , lorsque la mesure est inférieure au seuil de décision, d'utiliser la limite haute *a priori*, à savoir la limite de détection, pour énoncer :

$$y < y^* \Rightarrow \tilde{y} < y^{\#}$$ *(cf partie 1 rel 19)*

Une telle position, ou absence de position, est une régression par rapport à l'approche de Currie qui permettait dans la plupart des cas d'obtenir une upper limit U_L significative pour des valeurs de mesures inférieures au seuil de décision (*Currie 1968*).

Remarque 1: Une petite note, apparaissant dans le chapitre 6.5 de la norme ISO 11929 (*Assessment of a measurement procedure***),** semble contredire les assertions précédentes :

"NOTE 2 If the decision rule defined by the decision threshold is not used and if $y < y^*$ *the best estimate,* $\hat{y}$ *, and its standard uncertainty,* $u(\hat{y})$ *can also be calculated."*

Mais cette note, introduite à la demande de l'un d'entre nous lors des dernières réunions sur la norme ISO 11929, arrive bien trop tard et reste inaudible devant le nombre d'assertions contraires. Elle ne fait que renforcer l'incohérence générale de cette norme. Le retour d'expérience avec les utilisateurs de cette norme montre que cette petite note est passée complètement inaperçue.

Remarque 2 : Dans le même esprit, une note apparaissant dans le dernier chapitre de la norme ISO 11929(§7, documentation) semble apporter une information supplémentaire lorsque la valeur de mesure est inférieure au seuil de décision :

"NOTE If the physical effect is not recognized as being present, i.e. if $y < y^*$ *, it is occasionally demanded by the regulator to document "* $< y\#$ *" instead of the measured result, y […]"*

Cette note serait porteuse d'information pertinente s'il était précisé que lorsque la valeur de mesure y est inférieure au seuil de decision y^*, alors la valeur vraie $\tilde{y}$ est selon toute vraisemblance inférieure à la limite de détection $y\#$ (cf partie 1 §3.4.5).

Mais hélas ce n'est pas le sens de cette note, dont l'objectif est seulement de dire qu'il est admissible de déclarer $y < y\#$ *au lieu de* $y < y^*$*, puisque effectivement* $y^* < y\#$*. Une telle information, triviale, ne présente aucune plus –value. La relation* $y < y\#$ *n'a pas le même sens ni la même porté que* $\tilde{y} < y\#$*.*

6 CONCLUSION. PROPOSITIONS GENERALES POUR UNE NOUVELLE NORME

L'approche proposée dans la première partie de cet article respecte les contraintes énoncées dans l'introduction : pour l'échantillon 2, l'intervalle de confiance est construit *ab initio* sans partie négative, et la probabilité d'être non-radioactif est évaluée.

Dans l'approche proposée dans la norme ISO 11929, le calcul de $P(H_0)$ est exclue et aucun intervalle n'est estimé. Cette norme manque ainsi totalement sa cible en ce qui concerne l'analyse des mesures en dessous du seuil de décision.

L'étendue des critiques exposées dans cet article montrent que la refonte de la norme ISO ne peut se contenter de modifications mineures. Elle doit être rebâtit sur une approche bayesienne plus rigoureuse et cohérente, et en conséquence plus compréhensible pour les utilisateurs. Pour cela il faut commencer par redonner tout son sens au problème en travaillant dans une dialectique cause-effet conforme à la réalité expérimentale, et ne pas vouloir masquer à tous prix les aspects fréquentistes des mesures nucléaires. Cette démarche est indispensable pour que la norme ait un caractère pédagoqique indispensable, Les modifications proposées peuvent se résumer de la façon suivante :

Construction de la loi a posteriori La construction de la loi *a posteriori* $f(y|\boldsymbol{a})$ peut être conservée au titre d'approximation pratique. Elle doit cependant être tronquée à l'origine sans normalisation multiplicative, pour conserver l'évaluation de $P(H_0)$.

Estimateurs bayesiens, Incertitude et intervalle de confiance : Le calcul des estimateurs $\hat{y}$ et $u(\hat{y})$ est modifié, mais cela reste secondaire dans la mesure où ces grandeurs ne présentent guère d'intérêt en dessous du seuil de décision. Le calcul des bornes hautes $y^{\triangleright}$ et basses $y^{\triangleleft}$ est inchangé, mais la borne basse $y^{\triangleleft}$ n'est pas significative en dessous du seuil de décision et doit être remplacé par 0. Le niveau de confiance est légèrement modifié, mais là encore cela reste peu significatif. Le plus important, conformément au chapitre précédent, est de comprendre qu'il est non seulement possible, mais surtout recommandé de calculer ces estimateurs bayesiens lorsque la valeur de mesure est inférieure au seuil de décision, y compris pour des valeurs négatives. Rappelons que ces estimateurs convergent très rapidement vers les estimateurs classiques lorsque la valeur de mesure est supérieure au seuil de décision. La possibilité de déclarer une valeur haute inférieure à la limite de détection, voire au seuil de décision pour les mesures négatives, risque de surprendre les utilisateurs, habitués à censurer de telles valeurs, en se contentant de déclarer "$< L_D$" seulement. Cela reste pourtant une plus-value intéressante. De toutes les informations accessibles pour des mesures à bas niveau, la plus intéressante et la plus pertinente est la valeur haute $y^{\triangleright}$ déjà mise en exergue par Lyod Currie en 1968. De plus, le calcul classique et élémentaire de cette valeur est très proche dans la plupart des cas du calcul bayesien, plus complexe et moins immédiat.

Seuil de décision et limites de détection: Il faut avant tout revenir au concept orthodoxe de test statistique d'hypothèse en réintroduisant l'hypothèse préférentielle H_0 et alternative H_1. et établir clairement la distinction entre les distributions de ces hypothèses, définies dans l'espace des valeurs de mesures, et les loi *a posteriori* du mesurande, définies dans l'espace des valeurs vraies. Ce n'est que dans ce cadre que les concepts fréquentistes de risque de première et seconde espèce prennent leurs sens. Le concept d'incertitude $\tilde{u}(\tilde{y})$ associé à la « valeur vraie assumée » $\tilde{y}$ doit disparaitre, de

même que l'expression $y^* = k_{1-\alpha}\tilde{u}(\tilde{y})$ du seuil de décision . De tels concepts, dénué de sens réel, ne peutvent qu'entretenir la confusion entre incertitude et seuil de décision, brouillant totalement le message vis-à-vis des utilisateurs. Le seuil de décision, dans son acceptation fréquentiste incontournable, doit être défini par $y^* = k_{1-\alpha}\sigma_{H_0}$ (*cf partie 1 rel 4*).. .Au-delà de la notation, une telle expression ouvre la possibilité, fort utile, de déterminer expérimentalement le seuil de décision *par répétitions des mesures d'un échantillon non radioactif (cf partie 2 raison 4)* et donne tout son sens au concept de risque de première espèce.

Prise en compte de l'incertitude sur le facteur de conversion : la prise en compte des incertitudes sur le facteur de conversion, principale ambition de la norme ISO 11929, est totalement en défaut lorsque ces incertitudes relatives deviennent signicatives, c'est-à-dire lorsque l'impact sur le calcul de la limite de détection n'est plus négligeable. Ce problème, qui n'est qu'un faux problème, provient d'une utilisation abusive de l'approximation gaussienne des distributions. Ironiquement, cette approximation est recevable pour de faibles incertitudes relatives, mais ne présente guère d'intérêt, car l'impact sur la limite de détection est proprement imperceptible.

Les modèles de mesure : cet aspect n'a guère été évoqué dans ces articles, et nécessiterait à lui seul plusieurs articles et développement. La norme 11929 doit rester une norme générale. Elle peut expliciter la méthode à partir du modèle simple mais fondamental $Net = Gross - BkG$ ou encore du modèle plus général $\mathcal{A} = Net/\varepsilon T$. Quelques applications, parmi les plus usuelles, spectromètrie gamma, ictomètres, portique de détection, peuvent être données en annexe, sans présenter de caractère normatif.

En toute rigueur, chaque type de mesure, en particulier en spectrométrie, doit être analysé au cas par cas, et faire éventuellement l'objet de normes ou d'études spécifiques.

Des problèmes spécifiques apparaissent par exemple dans des analyses biologiques mettant en œuvre des mesures de spectrométrie alpha. Des caractéristiques telles que l'utilisation de traceurs, de dégradation de pics et de très faibles valeurs de comptages peuvent nécessiter des méthodes de calculs de seul de décision spécifiques pour chaque type de radionucléides recherché. (*cf Vivier et al., 2010)*

Autre exemple, la discrimination des isotopes Xénon 133 et Xénon 135 sur un spectre gamma d'environnement peut s'avérer assez délicate car elle s'appuie d'une part sur des émissions X communes assez intenses et d'autre part sur des émissions gamma spécifiques très peu intenses, et souvent en dessous de leur seuil de décisions respectif. La méthode de discrimination, fondée sur une approche par fonction de vraisemblance conjointe à deux paramètres ne peut être généralisé dans une norme. (*Vivier, Le Petit., 2009*).

C'est le reproche que l'on peut adresser à l'annexe C de la norme ISO 11929, consacrée à la spectrométrie gamma est un exemple . Outre le fait qu'elle est normative, cette annexe est pour l'essentiel hors sujet puisqu'elle propose une méthode de déconvolution des spectres gamma. Or il existe plusieurs méthodes possibles de déconvolution, chacune pouvant être adaptée à des situations spécifiques. De plus cette méthode impose une largeur des régions d'intérêts (*ISO 11929, relations C.6 et C.10*) en suivant une méthode surprenante : elle propose différentes largeurs suivant l'absence ou la présence de pics. Ce qui revient à utiliser une méthode dont l'objectif final est de savoir si un signal est détecté ou non, en fonction de la présence ou non de ce même signal. De plus, seconde incohérence, lorsque un signal est supposé absent, la méthode préconisé pour calculer le seuil d'une décision qui a déjà été prise, impose un demi-largeur de région d'intérêt égale à $1{,}2\ FWHM$, bien trop étroite. Il s'avère que cette optimisation ne tient pas compte de la chute significative du rendement de pic lorsque la largeur de la région d'intérêt passe en dessous de $2{,}5\ FWHM$. De fait la valeur $1{,}2\ FWHM$ correspond à l'optimum d'un rapport signal sur bruit valable seulement en l'absence de signal, ce qui est dénué de sens (*De Gerr, 2004*).

De plus, devant la difficulté intrinsèque des concepts et du formalisme bayesien et des tests d'hypothèses, une nouvelle norme se devra d'être plus pédagoqique que la norme actuelle. Une telle démarche n'est en rien incompatible avec l'esprit normatif : une règle ne peut être bien appliquée que

si elle est bien comprise. Certaine normes, dans le domaine des statistiques, sont écrites avec une telle volonté pédagogique (*cf NF X06-031-0 sur la maitrise statistiques des processus*).

REFERENCES

ISO 11929:2010: Determination of characteristic limits (decision threshold, detection limit, and limits of the confdence interval) for measurements of ionizing radiation|Fundamentals and applications. Geneva, International Organization for Standardization, 2010

[ISO/IEC Guide 98{3:2008; BIPM JCGM 100:2008: Uncertainty of measurement| Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM). Geneva, International Organization for Standardization; Bureau international des poids et mesures, 2008

NF X06-031-0 *Application de la statistique, cartes de contrôles. Principes généraux*, 1995

Currie LA. : *Limits for qualitative detection and quantitative determination*. Anal Chem **40**:586-592 , 1968

Weise K., *Bayesian-statistical decision threshold, detection limit ,a nd confidence interval in nuclear radiation measurement*. Kerntechnik **63**, 214-224, 1998

K. Weise, K. Hübel, E. Rose, M. Schläger, D. Schrammel, M. Täschner R. Michel, *Bayesian decision threshold detection limit and confidence limits in ionizing radiations measurement* ,Radiation Protection Dosimetry, **121**, 52–63, 2006

Weise K., Kanisch G., Michel R., Schläger M., Schrammel D., Täschner M. : *Characteristic values in radiation measurement_material for a critical discussion on fundamentals and alternatives*.Ed IRPA - Fortschritte im Strahlenschutz ,2013

Gregory P.*, Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences*. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2003**.**

Kauffmann P. : *Statistique, information, estimation, tests* , Dunod, Paris1994

Saporta G. : *Probabilités , analyse des données et statistiques*, Ed Technip, Paris, 1990

Vivier A, Aupiais J *Optimization of the decision threshold for single radioactive counting*. Radiochim Acta **95**:477-492, 2007

Vivier, A.; Le Petit, G.; Pigeon, B.; Blanchard, X.: *Probabilistic assessment for a sample to be radioactive or not: application to radioxenon analysis*. J. Radioanal. Nucl. Chem., **282**, 743-748, 2009

Vivier A. ; Manificat G. ; Picolo J-L.; Fleury;S.; Mokili M. ; Guo X. Decision *threshold associated with multiple measurements. Application to the synthesis of the environment monitoring results*. Radioprotection ,**47** , 51-77, 2012

Vivier A., Fottorino R., Rousse B. *Seuil de décision et limite de détection :estimation, interprétation et optimisation 2e partie : application aux spectres alpha uranium urinaire*. Radioprotection **45,** 345-357,2010

Kirkpatrick JM ; Young BM. : *Poisson Statistical Methods for the Analysis of Low-Count Gamma* Spectra. IEEE transactions on nuclear science, **56**, 1278-1282, 2009

Miller G.; Martz H.; Little T., Bertelli L. *Bayesian hypothesis testing- use in interpretation of measurements.helth* Physics **94**, 248-254, 2008

Rivals I. C. Fabbri C., Euvrard G. , Blanchard X. : A Bayesian method with empirically fitted priorsfor the evaluation of environmental radioactivity: application to low-level radioxenon measurements" J Radioanal Nucl Chem **292**:141–153, 2012

Kirkpatrick, J.M.; Venkataraman, R.; Young, B.M.: Minimum detectable activity, systematic uncertainties, and the ISO 11929 standard. J. Radioanal. Nucl. Chem.,6 pages, published online: 26 Aug. 2012

De Geer LE. *Currie detection limits in gamma-ray spectroscopy*. Appl Radiat Isot., **61**,151-60. 2004